Interactions entre stratégies de promotion et fusions

Laurent Granier

GROUPE D'ANALYSE ET DE THÉORIE ÉCONOMIQUE LYON - ST ÉTIENNE

WP 1311

Interactions entre stratégies de promotion et fusions

Laurent Granier

March 2013

GATE Groupe d'Analyse et de Théorie Économique Lyon-St Étienne

93, chemin des Mouilles 69130 Ecully – France
Tel. +33 (0)4 72 86 60 60
Fax +33 (0)4 72 86 60 90

6, rue Basse des Rives 42023 Saint-Etienne cedex 02 – France
Tel. +33 (0)4 77 42 19 60
Fax. +33 (0)4 77 42 19 50

Messagerie électronique / Email : gate@gate.cnrs.fr
Téléchargement / Download : http://www.gate.cnrs.fr – Publications / Working Papers

Interactions entre stratégies de promotion et fusions

Laurent Granier[*]

March 13, 2013

Résumé

De nombreuses études analysent les phénomènes de fusion en prenant en compte les variables stratégiques des firmes telles que les prix ou les quantités de vente. Or, peu d'études font le lien entre les stratégies de promotion et les fusions. Pourtant, les dépenses mondiales de promotion se porteront à 525 milliards de dollars en 2013 (Zenithoptimedia, 2012). Ceci nous incite à établir un modèle théorique étudiant l'influence de la promotion sur les incitations à fusionner. A l'instar de Friedman (1983a et 1983b), nous introduisons deux types de promotions, l'une étant prédatrice et l'autre coopérative. Nous trouvons que les incitations à fusionner différent de celles existantes dans les modèles de concurrence en prix (Brito, 2003).

Classification JEL : *I11, L12, L13, L41*

Mots clefs : *fusions et acquisitions, promotion coopérative, promotion prédatrice.*

Abstract

Many papers analyze merger phenomena by taking into account firms'strategies such as prices or quantities. But there is a lack of studies analyzing the link between advertising strategies and mergers. However, world advertising expenditures will represent 525 billions dollars in 2013 (Zenithoptimedia, 2012). This is why we build a theoretical model allowing to study the advertising effect on merger incentives. As Friedman (1983a and 1983b), we introduce two types of advertising, a first being a predatory one and the second being a cooperative one. We show that merger incentives are different from those found in price competition models (Brito, 2003).

JEL classification: *I11, L12, L13, L41*

Keywords: *mergers and acquisitions, cooperative advertising, predatory advertising.*

[*] Université de Lyon, Lyon, F-69007, France ; Université Lyon 2, Lyon, F-69007, France ; CNRS, GATE Lyon St Etienne, Ecully, F-69130, France. E-mail : granier@gate.cnrs.fr

1. Introduction

En 2013, l'estimation du taux de croissance prospectif est de l'ordre 4,6 %, ce qui porterait les dépenses mondiales de promotion à environ 525 milliards de dollars (Zenithoptimedia, 2012). De nombreuses études analysent les phénomènes de concentration des marchés, prenant en compte les variables stratégiques des firmes tels que les prix ou les quantités de vente. Or, la promotion peut être considérée comme une variable stratégique des entreprises et peu d'études font le lien entre la promotion et les stratégies de fusions et acquisitions. Ceci nous incite à établir un modèle théorique étudiant l'influence de la promotion sur les incitations à fusionner.

Afin de mieux comprendre les variables stratégiques de promotion, nous reprenons de façon synthétique la littérature théorique sur le sujet. Il faut tout d'abord savoir que l'impact de la promotion sur les consommateurs a été perçu de différentes manières dans la littérature. En reprenant Bagwell (2005), nous pouvons trier ces perceptions. La promotion peut être vue comme persuasive (Braithwaite 1928, Robinson, 1933 et Kaldor, 1950) en cela qu'elle distord les décisions des consommateurs par rapport à leur "réelles" préférences. Elle peut aussi être vue comme informative (Ozga, 1960, Stigler, 1961 et Telser, 1964) en cela qu'elle informe sur les caractéristiques des biens sans distordre les préférences "réelles" des consommateurs. Elle ne serait donc pas anti-concurrentielle. Enfin, il existe aussi une vue complémentaire de la promotion (Stigler et Becker, 1977, Nichols, 1985, Becker et Murphy, 1993). Celle-ci aurait une utilité propre qui s'ajouterait à celle retirée du produit auquel elle est associée. Nous reviendrons sur cette typologie au moment de l'analyse du bien-être collectif réalisée dans notre étude.

Dans notre modèle, la concurrence en promotion est analysée à travers une deuxième typologie, celle introduite par Friedman (1983a et 1983b) afin de caractériser les variables stratégiques de promotion. L'auteur définit deux types de promotions : la promotion prédatrice (qui augmente la part de marché) et la promotion coopérative[1] (qui accroît la demande de marché). Si les firmes sont symétriques, les dépenses de promotion coopérative d'une firme élèvent alors la demande de marché et celle-ci se répartit en parts égales entre les firmes de l'industrie. La firme ne peut donc pas capturer l'ensemble des bénéfices associés à ces dépenses de promotion. En revanche, si la promotion d'une firme est prédatrice, alors elle

[1]Le terme coopératif pourrait prêter à confusion puisqu'il ne s'agit pas d'un comportement coopératif entre les firmes. Toutefois, nous choisissons de conserver cette terminologie pour rester dans la lignée de Friedman (1983a et 1983b).

élève sa part de marché. La firme profite ainsi de l'ensemble des bénéfices engendrés par ses dépenses de promotion[2]. Ainsi, Friedman (1983a) énonce les intuitions suivantes. Les firmes sont incitées au "*free-riding*" dans un jeu non-coopératif puisqu'elles bénéficient des effets de la publicité coopérative de leurs concurrents. Par contraste avec la publicité coopérative, la publicité prédatrice influence les parts de marché des firmes. Ceci incite les firmes à sur-investir en publicité prédatrice pour ne pas perdre de parts de marché. Par conséquent, la concurrence en publicité prédatrice induit un dilemme du prisonnier. Friedman (1983b) et Mariel et Sandonis (2004) contredisent pourtant ces intuitions dans leurs modèles respectifs. Ici, nous caractériserons donc les variables de promotion de la même façon que Friedman (1983a et 1983b) en prenant en compte deux variables distinctes de publicités[3] et chercherons à voir si les intuitions formulées ci-dessus sont vérifiées ou non.

Après avoir défini les caractéristiques des stratégies de promotion, nous appréhendons l'interaction entre la fusion et les stratégies de promotion. Les efforts de promotion ont un double effet sur le profit des firmes puisqu'ils agissent à la fois sur les parts de marché et la demande de marché. Dès lors, comment influencent-ils l'incitation à fusionner puisque celle-ci repose sur le profit des firmes ? Et par la suite, comment la fusion modifie-t-elle la concurrence en promotion ? Cette interaction entre fusion et promotion est étudiée par Barros et Sørgard (2005) mais sans l'introduction de la différenciation entre les biens. De plus, à la différence de Barros et Sørgard (2005), nous tenons compte du dilemme de l'*insider* de Stigler (1950) selon lequel les firmes à l'extérieur de la fusion font plus de profit que si elles participent à celle-ci. Dans notre cadre d'analyse, nous nous inspirons du modèle de Brito (2003) qui intègre le dilemme de l'*insider* ainsi que des biens différenciés. Mais à la différence de son modèle, nous considérons une concurrence en promotion et non en prix.

Notons aussi que la réalité empirique nous incite à mesurer l'influence des deux variables de publicités sur les fusions. En effet, cette dualité de publicité est largement observée dans de nombreux secteurs. A côté de la publicité prédatrice ou de marque généralement observée, la publicité coopérative[4] peut apparaître de manière indépendante. Par exemple, comme le signifie Depken et alii (2002), les producteurs de lait américains investissent dans un fond commun permettant la promotion des produits laitiers en général[5]. La publicité générique est

---

[2]Certains auteurs (Friedman, 1983b, Slade, 1995, Piga, 1998, Mantovani et Mion, 2002 et Mariel et Sandonis, 2004) captent les deux aspects, prédateur et coopératif, dans une unique variable de publicité.

[3]Nous verrons ci-après que les deux variables sont souvent distinctes pour les entreprises. De plus, Ma et Ulph (2003) et Brekke et Kuhn (2006) opèrent la même séparation entre prédation et coopération.

[4]La publicité coopérative est souvent appelée publicité générique par opposition à la publicité de marque qui correspond à la publicité prédatrice.

[5]En 1983, les contributions volontaires à ce fond sont devenues obligatoires et indexées sur les ventes des

aussi dissociée de la publicité de marque : "en 1993, les dépenses combinées de promotions de marque et générique pour le boeuf, le porc et la volaille dépassaient 120 millions de dollars" (Brester et Schroeder, 1995, p 969).

Une industrie est particulièrement propice à l'application de notre étude. L'industrie pharmaceutique est caractérisée par des dépenses de promotion élevées d'une part. D'autre part, elle est sujette à des phénomènes de concentration horizontale. Contrairement à beaucoup d'autres industries, les efforts de promotion ne ciblent pas le consommateur final, mais le médecin. Récemment, toutefois, une nouvelle forme de promotion est apparue : la promotion orientée directement vers le consommateur (PODC)[6]. Les partisans considèrent qu'elle améliore la connaissance médicale du patient sur les symptômes des pathologies sous-diagnostiquées et sur les thérapeutiques disponibles. Ainsi, elle l'encourage à consulter pour des symptômes qu'il n'avait pas identifiés auparavant et pour lesquels ils n'étaient pas traités. Comme le choix de prescription est opéré par les médecins et non les patients, la PODC s'apparenterait à de la publicité coopérative en augmentant la taille du marché. La publicité orientée directement vers le médecin (PODM), quant à elle, influence les choix de prescription des médecins et s'apparente donc à de la publicité prédatrice. Même si de nombreux articles analysent les effets de la promotion pharmaceutique, peu d'articles considèrent les deux types de promotions, à l'exception notoire de Brekke et Kuhn (2006). Nous comblons ce manque en prenant en compte à la fois la publicité coopérative et la publicité prédatrice.

Peu d'études théoriques ont été menées sur la concurrence en promotion et sa relation avec les fusions. Nous proposons un modèle pour tenter de combler ces faiblesses. Plus précisément, nous répondons à plusieurs questions principales : comment interagissent les dépenses de prédation et de coopération ? La promotion modifie-t-elle les incitations à fusionner ? Nous tentons aussi de tirer des implications en termes de surplus des consommateurs et de bien-être collectif. Pour répondre à ces questions, nous supposons une concurrence en promotion où les firmes ont la possibilité de fusionner par paires. La promotion prédatrice des firmes influence la différenciation horizontale des biens tandis que la promotion coopérative permet d'accroître la taille du marché. Dans ce cadre théorique, nous obtenons les résultats suivants. Tout d'abord, la profitabilité de la publicité prédatrice s'élève avec les dépenses de publicité

---

producteurs avec l'adoption d'un texte nommé "Dairy Act".

[6]Cette stratégie n'est autorisée qu'aux Etats-Unis et en Nouvelle-Zélande. A l'heure actuelle, l'Union Européenne et le Canada l'interdisent en effet en vertu de l'application du principe de précaution tant elle est controversée. Cependant, malgré cette interdiction, un volume croissant de PODC en provenance des Etats-Unis parvient tout de même à ces pays par le biais de la télévision et d'Internet. Le rôle de la PODC est controversé

coopérative du concurrent et celle de la publicité coopérative baisse avec les dépenses de publicité prédatrice du concurrent. En outre, si le nombre de firmes initialement présent dans l'industrie est inférieur à cinq, la concurrence en promotion ne permet pas de supprimer le mécanisme de « *hold-up* » isolé par Brito (2003) dans un cadre de concurrence en prix. Par contre, pour des industries plus grandes nos résultats différent de ceux de Brito (2003). Pour certains niveaux de différenciation des biens, le mécanisme de « *hold-up* » disparaît et la fusion se produit mais pour d'autres degrés de différenciation et contrairement à Brito (2003), ce mécanisme persiste. Enfin, nous analysons l'effet des fusions sur le bien être collectif dans le cas particulier où la publicité prédatrice serait considérée comme purement persuasive et nous trouvons que les fusions, selon l'utilité brute que les consommateurs retirent de la consommation du bien en question, sont néfastes ou bénéfiques au bien-être collectif.

Dans la section 2, nous présentons le modèle concurrence en promotion. Les sections 3 et 4 sont dévouées à l'analyse de la relation entre fusion et promotion, la troisième étant consacrée aux cas où les *outsiders*[7] de la fusion sont homogènes alors que la quatrième présente des cas où les *outsiders* sont hétérogènes et permet de généraliser les résultats. Enfin, nous concluons dans la section 5.

2. Le modèle

Nous considérons un marché composé de n firmes, indicées par i, distribués uniformément sur un cercle dont la circonférence est unitaire. Nous notons x_i la localisation de la firme i. Le nombre de firmes est supérieur à l'unité puisque notre attention se porte sur l'équilibre concurrentiel, soit $i \in [1, n]$. Nous utilisons une forme réduite afin d'étudier la concurrence en promotion[8]. Cette hypothèse simplificatrice a l'avantage de mettre en exergue uniquement les effets de la promotion. Elle constitue également un compromis entre généralité et tractabilité puisqu'elle rend tractable notre modèle dans le cas des fusions horizontales. Dans ce cadre, les entreprises se concurrencent en publicité prédatrice mais elles ont également la possibilité

(Wilkes et *al.*, 2000).

[7] Les *outsiders* correspondent aux firmes qui ne participent pas à la fusion.

[8] Par hypothèse, les firmes tarifient alors au même prix et celui-ci est indépendant de la structure de marché. Cette hypothèse est certes restrictive mais commune à la littérature sur la promotion. En outre, comme le fit remarquer Schmalensee (1972), les modèles oligopolistiques qui négligent la concurrence en promotion sont tout aussi incomplets. De surcroît, nous pouvons également justifier cette hypothèse si nous considérons un cadre réglementaire où les prix sont régulés comme cela est le cas sur le marché pharmaceutique français (hors médicaments hospitaliers pour lesquels les prix sont libres), belge, ou encore suèdois (voir OCDE (2001, tableau A.7) pour d'autres exemples).

de se concurrencer en publicité coopérative[9]. Le niveau de publicité prédatrice est noté ϕ_i et le niveau de publicité coopérative est noté θ_i. Nous supposons une fonction de coût quadratique[10] en raison des rendements d'échelle décroissants estimés par des études empiriques comme Chintagunta et Vilcassim (1992) et Berndt et *al.* (1994 et 1995).

Nous considérons un continuum de consommateurs, distribués uniformément sur le cercle unitaire, de masse N où $N = 1 + \eta i = 1 i = n \sum \theta_i$ avec $\eta \geq 0$, l'efficacité de la publicité coopérative[11]. Les consommateurs ont des demandes unitaires. La localisation d'un consommateur, $\tilde{x} \in [0,1]$, est associée à ses caractéristiques personnelles[12]. Hors publicité prédatrice, l'utilité de l'agent localisé en $\tilde{x}_i$ qui consomme le bien localisé en x_i au prix p est :

$$V(x_i, \tilde{x}_i, p) = v - t(\tilde{x}_i - x_i)^2 - p, \tag{1}$$

où $v > 0$, $t > 0$ et $p > 0$. Le paramètre v est l'utilité de réserve pour la consommation d'un bien, ou encore l'efficacité brute du médicament pour le marché pharmaceutique. Par hypothèse, l'utilité de réserve est suffisamment élevée pour que le marché soit couvert. Le paramètre t représente le coût de transport quadratique par unité de distance parcourue[13]. En d'autres termes, il capture la désutilité créée par le bien effectivement consommé par rapport au bien idéal. Cette désutilité est représentée par $t(\tilde{x}_i - x_i)^2$. Dans l'industrie pharmaceutique, elle peut être interprétée comme les effets secondaires engendrés par l'inadéquation entre le médicament consommé et les caractéristiques du patient. La publicité prédatrice influence les choix de consommation. Nous représentons donc l'utilité totale du consommateur ainsi :

$$U(\phi_i, x_i, \tilde{x}_i, p, \beta) = \beta\phi_i + V(x_i, \tilde{x}_i, p). \tag{2}$$

---

[9]Notre modèle est un jeu statique. Or, la promotion a des effets inter-temporels durables. Cependant, comme le montrent Richard et Van Horn (2004) pour le marché pharmaceutique, l'effet temporel de la publicité prédatrice ne dure que 5 ou 6 mois. L'effet temporel de la publicité coopérative est estimé à environ 1 mois par Berndt et *al.* (1994 et 1995) sur ce même marché. Par conséquent, notre formulation statique semble appropriée.

[10]Pour rendre notre modèle applicable en particulier au marché pharmaceutique, nous supposons comme Brekke et Kuhn (2006) et Königbauer (2007), l'absence de coût de R&D. En effet, les dépenses de R&D sont considérées comme des coûts fixes et ils ne jouent aucun rôle au moment de la concurrence en promotion. De même, nous supposons un coût marginal de production constant et identique, lequel est normalisé à zéro. En outre, nous considérons qu'il n'y a pas de coût fixe d'entrée car nous n'étudions pas la décision d'entrée sur ce marché.

[11]Par hypothèse, nous excluons le cas où les firmes font face à une demande nulle. Donc, nous avons ajouté 1 à $\eta \sum_{i=1}^{i=n} \theta_i$. Autrement dit, la publicité coopérative permet d'accroître une densité initialement unitaire. Cette formalisation est similaire à celle utilisée par Barros et Sørgard (2005).

[12]Dans le cas du marché pharmaceutique, la localisation d'un patient correspond à sa pathologie.

[13]Cette hypothèse technique nous évite des problèmes de discontinuité des fonctions de demande engendrés par une hypothèse de coûts linéaires. Voir Tirole (1993 et 1995) pour davantage de détails.

Le paramètre $\beta \geq 0$ représente l'efficacité de la promotion prédatrice. Dans le domaine pharmaceutique, cette fonction peut être interprétée comme l'utilité du médecin, où $V(.)$ représente l'utilité du patient et $\beta\phi_i$ l'utilité retirée par le médecin de la promotion prédatrice. A la suite d'Ellis et McGuire (1986), nous considérons le médecin partiellement altruiste, le degré d'altruisme[14] étant capturé par le paramètre β.

Les firmes se concurrencent en publicité prédatrice mais elles ont la possibilité d'utiliser également la publicité coopérative. Dans cette section, nous appréhendons alors deux questions principales : quel type d'interaction existe-t-il entre les variables de promotion ? Nous nous demandons aussi si la publicité coopérative est profitable aux entreprises ? Pour répondre à ces questions, nous caractérisons les équilibres avec et sans publicité coopérative afin de pouvoir les étudier et les comparer. Nous débutons l'analyse avec la concurrence en publicité prédatrice avant d'étudier le cas où la concurrence s'effectue également en publicité coopérative[15].

2.1. Concurrence en promotion prédatrice

Nous commençons par définir la part de marché de la firme i. Nous avons noté x_i la localisation de la firme i sur le cercle de longueur unitaire. Notons également $d_i \equiv x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$ la distance entre la firme i et la firme $i+1$. L'entreprise i a deux concurrents directs, la firme $i+1$ et la firme $i-1$. La segmentation du marché dépend des caractéristiques des consommateurs. En effet, le consommateur indifférent entre consommer le traitement i et le traitement $i+1$ et localisé en x_i^*, avec $x_i < x_i^* < x_{i+1}$, nous est donné par la relation suivante :

$$\begin{aligned} &U(\phi_i, x_i, x_i^*, p, \beta) = U(\phi_i, x_{i+1}, x_{i+1}^*, p, \beta), \\ &\Leftrightarrow \beta\phi_i + v - t(x_i^* - x_i)^2 - p = \beta\phi_{i+1} + v - t(x_{i+1} - x_i^*)^2 - p. \end{aligned} \tag{3}$$

Le consommateur marginal est donc défini comme suit :

$$x_i^* = \frac{1}{2}\frac{\beta(\phi_i - \phi_{i+1})}{td_i} + \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}). \tag{4}$$

Par analogie, le patient marginal localisé en x_{i-1}^*, avec $0 < x_{i-1}^* - x_{i-1} < d_{i-1}$, est défini de la

[14]La publicité prédatrice sera d'autant plus efficace que le paramètre d'altruisme sera élevé. En effet, si $\beta > 1$ alors le médecin prévilégie davantage son utilité, c'est-à-dire les bénéfices retirés de la promotion, que l'utilité du patient.

[15] Pour plus de détails et d'analyses de cette concurrence en promotion, se référer à Granier et Trinquard (2013b).

manière suivante :

$$x_{i-1}^{*}=\frac{1}{2}\frac{\beta(\phi_{i-1}-\phi_i)}{td_{i-1}}+\frac{1}{2}(x_i+x_{i-1}). \quad (5)$$

Dans ce cadre, la demande adressée à la firme i est divisible en deux parties : l'une concerne les consommateurs situés à sa gauche et l'autre, ceux situés à sa droite. La demande totale de la firme i est donc :

$$D_i(\phi_{i-1},\phi_i,\phi_{i+1})=x_i^{*}-x_{i-1}^{*}=\frac{1}{2}\frac{\beta(\phi_i-\phi_{i+1})}{td_i}+\frac{1}{2}\frac{\beta(\phi_i-\phi_{i-1})}{td_{i-1}}+\frac{1}{2}(d_i+d_{i-1}). \quad (6)$$

Cette fonction de demande se réécrit[16] :

$$D_i(\phi_{i-1},\phi_i,\phi_{i+1})=\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{\beta(2\phi_i-\phi_{i+1}-\phi_{i-1})n}{t}. \quad (7)$$

La demande de la firme i est positive si :

$$\phi_i>\frac{\phi_{i+1}+\phi_{i-1}}{2}-\frac{t}{n^2\beta}. \quad (8)$$

En l'absence de publicité coopérative, la fonction de profit de la firme i est donc définie ainsi :

$$\Pi_i=pD_i(\phi_{i-1},\phi_i,\phi_{i+1})-\frac{1}{2}\phi_i^2 \text{ avec } i=1,2,...,n. \quad (9)$$

Soit :

$$\Pi_i=p\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{\beta(2\phi_i-\phi_{i+1}-\phi_{i-1})n}{t}\right)-\frac{1}{2}\phi_i^2 \text{ avec } i=1,...,n. \quad (10)$$

Par la suite, nous signalons les variables d'équilibre par l'exposant $*$. La publicité prédatrice d'équilibre[17] est donnée par[18] :

$$\phi^{p*}=\frac{p\beta n}{t}. \quad (11)$$

Le profit à l'équilibre, noté Π^{p*}, se formule alors ainsi :

$$\Pi^{p*}=\frac{p}{n}-\frac{1}{2}\frac{p^2\beta^2n^2}{t^2}. \quad (12)$$

A l'équilibre symétrique, le profit des firmes est positif si $t>t^p(n)$, avec $t^p(n)=\frac{1}{2}n\beta\sqrt{2pn}$. Selon cette condition, le degré de différenciation doit être suffisamment élevé afin de pouvoir bénéficier d'un profit positif. L'intuition sous-jacente à cette condition est la suivante : à l'équilibre symétrique, la recette de la firme est indépendante des dépenses de publicité

---

[16]La demande de la firme i est positive si : $\phi_i>\frac{\phi_{i+1}+\phi_{i-1}}{2}-\frac{t}{n^2\beta}$.

[17] Les CPO sont données par Granier et Trinquard (2013b)

prédatrice. En effet, la publicité prédatrice n'affecte que la fonction de coût d'une firme. En outre, ces dépenses sont d'autant plus élevées que le degré de différenciation est faible puisque cela représente une concurrence en promotion plus intense. Ainsi, si le degré de différenciation est élevé, le coût en publicité prédatrice est assez faible pour que le profit d'équilibre soit positif.

A présent, nous examinons l'impact d'un choc exogène sur les dépenses d'équilibre de publicité prédatrice, toutes choses égales par ailleurs. Pour cela, nous dérivons l'expression (11) par rapport à chaque variable exogène. Nous mettons en évidence quatre résultats. Tout d'abord, les dépenses de publicité prédatrice s'élèvent avec le prix. En effet, plus le prix est élevé et plus il est rentable d'élargir sa part de marché. Les firmes sont donc incitées à augmenter leurs dépenses de promotion prédatrice. D'autre part, les dépenses de publicité prédatrice augmentent avec l'accroissement de l'efficacité de la publicité prédatrice. D'une manière intuitive, plus la promotion prédatrice est efficace, c'est-à-dire plus son effet sur les parts de marché est important, plus les firmes font de dépenses en prédation. En outre, les dépenses de publicité prédatrice sont reliées positivement avec le nombre de firmes sur le marché. En effet, l'augmentation du nombre de concurrents engendre une hausse de l'intensité concurrentielle. Les firmes sont donc incitées à élever leurs dépenses de publicité prédatrice. Enfin, les dépenses de publicité prédatrice à la suite d'une hausse du degré de différenciation. Un accroissement de la différenciation engendre une baisse de la concurrence, entraînant ainsi une diminution des dépenses en publicité prédatrice.

2.2. Concurrence en promotion prédatrice et coopérative

A présent, nous analysons le cas où les firmes ont également la possibilité de faire de la promotion coopérative. La recette de de la firme i s'écrit de la même manière que précédemment à la différence près que celle-ci est multipliée par la taille du marché qui dépende de la publicité coopérative des firmes. La fonction de profit de la firme i est donc donnée par :

$$\Pi_i = p(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\frac{\beta\left(2\phi_i-\phi_{i+1}-\phi_{i-1}\right)n}{t})(1+\eta i=1 i=n\sum\theta_i)-\frac{1}{2}(\phi_i^2+\theta_i^2)\text{ avec } i=1,...,n. \qquad (13)$$

Pour explorer l'interaction stratégique entre les deux variables de promotion, nous débutons l'analyse par l'étude de la substituabilité ou de la complémentarité stratégique entre les deux types de publicités :

[18]La contrainte (8) de positivité des demandes est satisfaite.

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \phi_i \partial \theta_{i+1}} > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \phi_i \partial \theta_{i-1}} > 0 \text{ avec } i = 1, ..., n. \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \theta_i \partial \phi_{i+1}} < 0 \text{ et } \frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial \theta_i \partial \phi_{i-1}} < 0 \text{ avec } i = 1, ..., n. \tag{15}$$

Les résultats sont résumés dans la remarque suivante [19]:

Remarque 1 *Pour une firme donnée, les dépenses en promotion coopérative du concurrent sont compléments stratégiques à ses propres dépenses de promotion prédatrice. En revanche, les dépenses en promotion prédatrice du concurrent sont substituts stratégiques à ses propres dépenses de promotion coopérative.*

A présent, nous déterminons l'équilibre concurrentiel. Par hypothèse, les firmes choisissent simultanément leurs efforts de promotion[20]. Les CPO[21] sont données dans Granier et Trinquard (2013b). L'équilibre en promotion[22] est alors :

$$\phi^* = \frac{p\beta n\left(1 + p\eta^2\right)}{t}, \quad \theta^* = \frac{p\eta}{n}. \tag{16}$$

Nous pouvons remarquer que la possibilité de faire des dépenses de promotion coopérative engendre une augmentation des dépenses de promotion prédatrice. A l'équilibre symétrique, le profit, noté Π^*, s'écrit :

$$\Pi^* = \frac{p\left(1 + p\eta^2\right)}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{p^2\beta^2 n^2\left(1 + p\eta^2\right)^2}{t^2} + \frac{p^2\eta^2}{n^2}\right). \tag{17}$$

Le profit d'équilibre symétrique est positif si $t > \bar{t}(n)$, avec :

$$\bar{t}(n) = \frac{\sqrt{\left(2n(1 + p\eta^2) - p\eta^2\right)p}\left(1 + p\eta^2\right)n^2\beta}{2n(1 + p\eta^2) - p\eta^2} > 0, \forall n, \forall p, \forall \beta, \forall \eta. \tag{18}$$

Maintenant, nous terminons l'examen de la concurrence en publicités prédatrice et coopérative par une analyse de statique comparative. Notons tout d'abord que les variables t et β n'ont pas d'influence sur le niveau d'équilibre de la promotion coopérative. En effet, ce

---

[19] Pour plus de détails et d'analyses de cette concurrence en promotion, se référer à Granier et Trinquard (2013b).

[20] De manière analogue à Brekke et Kuhn (2006), nous supposons que les niveaux de promotion coopérative et de promotion prédatrice sont choisis simultanément.

[21] Les conditions de deuxième ordre nécessaires à un maximum sont satisfaites puisque le Hessien est défini négatif dans notre cadre d'analyse.

[22] La demande de la firme i est positive si : $\phi_i > \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1}}{2} - \frac{t}{n^2\beta}$. Cette contrainte de positivité des demandes est satisfaite pour nos valeurs d'équilibre.

niveau est uniquement relié à la part de marché de chaque firme, au niveau du prix et au niveau de l'efficacité de la coopération. Les variables t et β influent uniquement sur la concurrence en prédation. Or, le jeu est symétrique et le degré de concurrence en prédation ne modifie pas les parts de marché des firmes. Les variables t et β n'ont donc pas d'impact sur le niveau de promotion coopérative. Ensuite, les dépenses de promotion coopérative s'élèvent avec le niveau du prix. En effet, plus le prix augmente et plus le bénéfice par bien vendu s'accroit. Ainsi, la rentabilité de la promotion coopérative s'élève. D'autre part et de façon intuitive, les dépenses de promotion coopérative s'élèvent avec leur efficacité. Enfin, le niveau d'équilibre en promotion coopérative baisse avec le nombre de concurrents. En effet, si le nombre de concurrents s'élève, alors les parts de marché des firmes baissent. Concernant les dépenses de promotion prédatrice, celles-ci s'élèvent avec l'efficacité de la promotion coopérative[23]. En effet, les firmes sont incitées à capturer plus de parts de marché.

2.3 Fusions et promotion

Les efforts de promotion ont un double effet sur le profit des firmes puisqu'ils agissent à la fois sur les parts de marché et la demande de marché. Dans ce contexte, deux questions sont susceptibles d'être appréhendées. D'une part, comment la fusion modifie-t-elle la concurrence en promotion ? D'autre part, la concurrence en promotion favorise-t-elle les fusions ? Pour répondre à ces deux questions, nous proposons un jeu en deux étapes. A la première étape du jeu, la fusion d'une paire de firmes peut être décidée[24]. Par simplification, nous supposons une règle de partage égalitaire des profits entre les firmes impliquées dans la fusion. Nous considérons également que les autorités de la concurrence ne s'opposent pas à cette fusion. Néanmoins, la monopolisation est interdite[25]. De plus, comme les localisations représentent des caractéristiques précises de biens produits, nous supposons que les firmes ne peuvent se relocaliser après fusion. A la deuxième étape, les firmes se concurrencent en promotion. Notre étude analyse différentes structures initiales de marché que nous identifions par la notation (n) accolée à chaque variable, où n représente le nombre initial de firmes dans l'industrie.

[23] Les effets des autres variables exogènes sur les dépenses d'équilibre en publicité prédatrice sont similaires au cas précédent ($\frac{\partial \phi^{pc*}}{\partial t} < 0$, $\frac{\partial \phi^{pc*}}{\partial n} > 0$, $\frac{\partial \phi^{pc*}}{\partial p} > 0$ et $\frac{\partial \phi^{pc*}}{\partial \beta} > 0$), seule l'amplitude de ces effets est modifiée.

[24] "Notons que pour dix firmes symétriques ou moins, l'indice Herfindahl-Hirschman est toujours supérieur à 1000 et l'augmentation de cet indice provoqué par une fusion de deux firmes est toujours supérieure à 100. en supposant l'absence d'entrée post-fusion et de synergie engendrée par la fusion, il est possible qu'une autorité de la concurrence se fiant aux seuils présentés dans les *US Merger Guidelines* s'oppose à une deuxième fusion (voire même à la première) tant que le nombre de firmes dans l'industrie est inférieur à 10" Brito (2003, p. 1604).

[25] Dans cette perspective, nous ne considérons pas une structure initiale duopolistique.

Selon la taille initiale de l'industrie, les entreprises ne participant pas à l'éventuelle fusion, appelées *outsiders*, peuvent être de même type (homogène) ou de type hétérogène. Ces types font référence à la localisation des firmes sur le marché. Nous utilisons par la suite cette dichotomie.

3. Homogénéité des *outsiders*

Seules deux structures initiales d'industries ne font pas apparaître d'hétérogénéité entre les *outsiders* après la fusion d'une paire de firmes. Il s'agit d'industries initialement composées de trois ou quatre firmes.

3.1. Marché de trois firmes

Dans ce cas là, il y a un seul *outsider*. Nous ne pouvons donc pas parler d'hétérogénéité des *outsiders*. Avant d'étudier la fusion et d'examiner ses effets sur les dépenses de promotion, nous devons établir une situation de référence où les trois firmes se concurrencent. Cette situation est un cas particulier de la concurrence en prédation et en coopération étudiée avec n firmes à la section 4.2. Ainsi, les niveaux de promotion à l'équilibre sont :

$$\begin{gathered}\phi_i^*(3) = \frac{3p\beta(1+p\eta^2)}{t} \text{ avec } i = 1,2,3, \\ \theta_i^*(3) = \frac{p\eta}{3} \text{ avec } i = 1,2,3.\end{gathered} \tag{19}$$

Les profits d'équilibre sont alors de la forme suivante :

$$\Pi_i^*(3) = \frac{p}{18t^2}((6+5p\eta^2)t^2 - 81\beta^2 p(1+p\eta^2)^2) \text{ avec } i = 1,2,3. \tag{20}$$

Les demandes et les profits sont positifs si $t > \bar{t}(3)$, avec $\bar{t}(3) = \frac{9\sqrt{p(6+5p\eta^2)}(1+p\eta^2)\beta}{6+5p\eta^2}$. Nous limitons la suite de notre étude à $t > \bar{t}(3)$ car c'est la condition de viabilité de notre cadre de référence.

3.1.1. Fusion de deux firmes

Sans perte de généralité, nous supposons que les firmes 1 et 2 fusionnent comme cela est schématisé dans la figure 1 ci-dessous (les autres paires de firmes sont des cas symétriques).

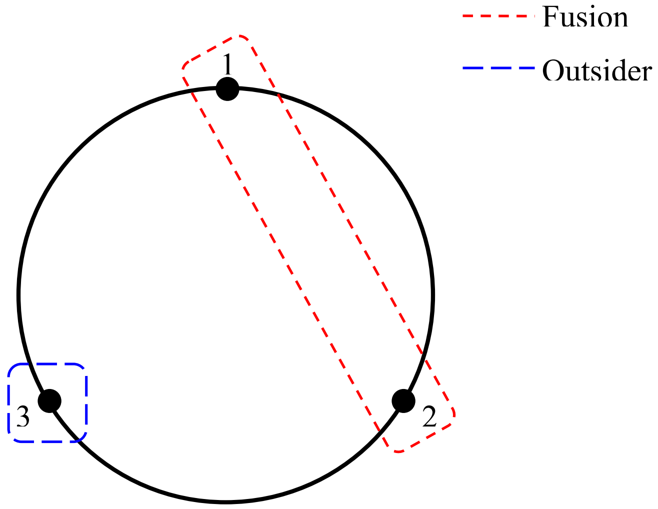

Figure 1 : industrie de trois firmes

Nous notons en indice inférieur le ou les unité(s) de production concernée(s) et en indice supérieur le nom de l'entité fusionnée. Le profit de l'entité fusionnée est donc représenté par $\Pi_{12}^{12}(3)$ et celui de la firme hors fusion est lui noté $\Pi_{3}^{12}(3)$:

$$\begin{aligned} \Pi_{12}^{12}(3) &= \Pi_1(3) + \Pi_2(3), \\ \Pi_3^{12}(3) &= \Pi_3(3). \end{aligned} \tag{21}$$

A l'équilibre, noté par un indice supérieur $*$, les niveaux de publicités[26] sont définis comme tels :

$$\begin{aligned} \phi_i^{12*}(3) &= \frac{p\beta t(3+5p\eta^2)}{2t^2+9p^2\beta^2\eta^2} \text{ avec } i=1,2, \\ \phi_3^{12*}(3) &= \frac{2p\beta t(3+5p\eta^2)}{2t^2+9p^2\beta^2\eta^2}, \\ \theta_i^{12*}(3) &= \frac{1}{3}\frac{p\eta(4t^2-27\beta^2 p(1+p\eta^2))}{2t^2+9p^2\beta^2\eta^2}, \text{ avec } i=1,2, \\ \theta_3^{12*}(3) &= \frac{1}{3}\frac{p\eta(2t^2+27\beta^2 p(1+2p\eta^2))}{2t^2+9p^2\beta^2\eta^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Puisque les firmes ne peuvent se relocaliser, les contraintes de positivité des demandes sont identiques à l'expression (8). Nous vérifions leur positivité en annexe *1.1*. Les profits d'équilibre, notés $\Pi_{12}^{12*}(3)$ et $\Pi_3^{12*}(3)$, sont alors de la forme suivante :

[26]Les conditions de concavité des fonctions de profit sont satisfaites pour notre cadre d'analyse.

$$\Pi_{12}^{12*}(3) = \frac{8p(1+p\eta^2)t^4 - 3\beta^2 p^2(31p^2\eta^4 + 54p\eta^2 + 27)t^2 - 243\beta^4\eta^2 p^4(1+p\eta^2)^2}{3(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)^2},$$
$$\Pi_{3}^{12*}(3) = \frac{4p(2+3p\eta^2)t^4 - 12\beta^2\eta^4 p^4 t^2 - 243\beta^4\eta^2 p^4(1+2p\eta^2)^2}{6(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)^2}. \tag{23}$$

Nous vérifions dans l'annexe *1.1* que les profits d'équilibre, pour cette configuration d'industrie, sont positifs. Nous devons maintenant analyser les incitations à fusionner dans notre cadre de référence. Il existe une incitation à fusionner si le profit de l'entité fusionnée est supérieur à la somme des profits initiaux des firmes qui la constitue. Soit $GF(3)$ le gain de fusion :

$$GF(3) = \Pi_{12}^{12*}(3) - \Pi_1^*(3) - \Pi_2^*(3). \tag{24}$$

Nous prouvons dans l'annexe *3* que le gain de fusion de deux firmes consécutives dans une industrie constituée de trois firmes est positif. Il existe donc une incitation à fusionner. Nous retrouvons alors le résultat de Barros et Sørgard (2005). Néanmoins, à la différence de ces derniers, mais d'une manière analogue à Brito (2003), nous nous intéressons au phénomène de blocage de la fusion qui pourrait se produire si les firmes trouvent plus profitable d'être à l'extérieur de celle-ci. Ce phénomène est d'ailleurs appelé « *hold-up* » dans la littérature sur les fusions. Soit $GO(3)$, la variation de profit de l'*outsider* :

$$GO(3) = \Pi_3^{12*}(3) - \Pi_3^*(3). \tag{25}$$

Nous prouvons dans l'annexe *1.1* que la variation de profit de l'*outsider* à la fusion de deux firmes dans une industrie constituée de trois firmes est positif. Un blocage à la fusion peut apparaître si le gain de l'*outsider* est supérieur au gain d'une firme participant à la fusion. Soit la fonction $HP(3)$, la différence entre ces deux gains. Sa positivité entraîne un mécanisme de blocage de la fusion :

$$HP(3) = \frac{GF(3)}{2} - GO(3). \tag{26}$$

Proposition 1 *Bien qu'il existe un gain de fusion, la fusion ne prend pas place car la firme extérieure à la fusion gagne plus que chacune des firmes participant à cette fusion. Il y a ainsi hold-up.*

Preuve Se référer à l'annexe *1.1.*

Ce résultat est standard dans la littérature sur les fusions. Il est similaire à Brito (2003) qui examine une concurrence en prix. Par conséquent, nous rendons robuste son résultat à la concurrence en promotion.

3.1.2. Effets de la fusion sur les stratégies de promotion

Même si la fusion n'est pas réalisable en raison du *hold-up* de l'*outsider*, nous focalisons à présent notre attention sur l'influence de celle-ci sur le niveau des dépenses de promotion prédatrice et coopérative. En d'autres termes, nous examinons dans ce cadre simple d'industrie constituée de trois firmes initialement si la fusion accentue ou diminue la concurrence en promotion. Ceci nous permet de comprendre pourquoi la fusion est bloquée et nous permet aussi d'isoler des effets qui prendront leur importance dans la suite de notre analyse. Cette problématique a d'importantes implications pour les firmes et les autorités de régulation. En effet, si la fusion élève les dépenses de promotion, alors les coûts supportés par les firmes augmentent. Si cette hausse se traduit par plus de persuasion alors les autorités de régulation devront être plus vigilantes. Nous appréhendons l'impact de la fusion sur la promotion prédatrice, puis sur la promotion coopérative. Nous terminons par l'interprétation des résultats.

Promotion prédatrice

Pour analyser l'effet de la fusion sur les dépenses de promotion prédatrice, nous comparons les niveaux de ces dépenses avant et après la fusion. Cette comparaison[27] nous offre les résultats suivants :

Les firmes impliquées dans la fusion font moins de publicité prédatrice une fois la fusion achevée :

$$\phi_i^{12*}(3) - \phi_i^*(3) < 0 \text{ avec } i = 1, 2. \tag{27}$$

La firme non impliquée dans la fusion fait plus de publicité prédatrice après que la fusion soit survenue :

$$\phi_3^{12*}(3) - \phi_3^*(3) > 0. \tag{28}$$

Promotion coopérative

L'effet de la fusion sur le niveau des dépenses de PODC pour les firmes impliquées dans la fusion change de signe selon le degré de différenciation alors que pour l'*outsider*, il est toujours du même signe[28].

Pour les firmes impliquées dans la fusion, deux cas se présentent :

- Si $\bar{t}(3) < t < t^c(3)$, les firmes impliquées dans la fusion font alors moins de

[27]Les preuves sont disponibles en annexe *1.2.*
[28]Les preuves sont données en annexe *1.2*.

publicité coopérative une fois la fusion achevée :

$$\theta_i^{12*}(3) - \theta_i^*(3) < 0 \text{ avec } i = 1,2. \quad (29)$$

- Si $t > t^c(3)$, les firmes impliquées dans la fusion font alors plus de promotion coopérative une fois la fusion achevée :

$$\theta_i^{12*}(3) - \theta_i^*(3) > 0 \text{ avec } i = 1,2. \quad (30)$$

La firme non impliquée dans la fusion fait plus de publicité coopérative après que la fusion soit survenue :

$$\theta_3^{12*}(3) - \theta_3^*(3) > 0. \quad (31)$$

Interprétation

Après fusion, l'entité fusionnée centralise les décisions prises pour ses deux localisations. Ceci a pour conséquence de lui donner une incitation à augmenter son niveau de publicité coopérative. En effet, le niveau de "*free-riding*" existant sur la publicité coopérative est réduit au niveau de la fusion, celle-ci bénéficiant deux fois de ses propres dépenses de publicité coopérative. Nous appellerons ceci l'effet de centralisation des décisions. Il existe un second effet dû à la fusion. Nous le nommerons effet de concentration de marché. La firme fusionnée protège le marché compris entre ses deux localisations. Ceci induit plusieurs conséquences. Tout d'abord, l'entité fusionnée réduit son agressivité concurrentielle, c'est-à-dire qu'elle diminue son niveau de publicité prédatrice. Cela a pour conséquence directe de diminuer sa part de marché. Or, plus la part de marché d'une firme est faible, moins elle est incitée à dépenser en publicité coopérative, puisque celle-ci est liée positivement à sa part de marché. Finalement, la concentration de marché se solde donc par une tendance, pour la firme fusionnée, à diminuer les dépenses de publicité coopérative. Il y a donc deux effets qui jouent sur le niveau de publicité coopérative de l'entité fusionnée, l'un apparenté à la centralisation des décisions et l'autre, à la concentration du marché. Ainsi, si la concurrence est vive ($\bar{t}(3) < t < t^c(3)$), la baisse des dépenses de prédation de la fusion fait perdre beaucoup de parts de marché à cette dernière. C'est alors l'effet de concentration de marché qui l'emporte et la firme fusionnée fait moins de publicité coopérative. Si au contraire la concurrence est peu intense, c'est à dire si la différenciation des produits est forte ($t > t^c(3)$), la baisse des dépenses de prédation de la fusion entraîne une baisse de ses parts de marché plus limitée. C'est alors l'effet de centralisation des décisions qui l'emporte, ce qui engendre une augmentation du niveau de publicité coopérative de la fusion. La firme *outsider*, quant à elle, n'est soumise qu'à l'effet de concentration de marché. Elle profite de la baisse de l'agressivité concurrentielle de ses concurrents fusionnés pour augmenter son niveau de publicité prédatrice, ce qui a pour conséquence de lui faire gagner des parts de marché à moindre coût. Elle augmente alors son niveau de publicité coopérative proportionnellement à l'augmentation de ses parts de marché.

La firme fusionnée réalise bien un gain à la fusion puisqu'elle monopolise une partie du marché et annule en partie les effets du "*free-riding*" portant sur la coopération. Mais la firme *outsider* réalise un gain plus important car elle gagne des parts de marché pour un coût relativement faible, relie sa dépense de publicité coopérative à sa nouvelle part de marché et profite du comportement plus coopératif de la firme fusionnée. Ainsi, la fusion est bloquée par un phénomène de *hold-up* puisque une firme extérieure à l'éventuelle fusion profite plus de la fusion que les firmes y participant.

3.2. Marché de quatre firmes

Dans ce cas là, il y a deux *outsiders* si une fusion se produit. Mais que la fusion se fasse entre deux firmes consécutives ou non, les *outsiders* sont homogènes car totalement symétriques. Nous devons établir une situation de référence où les quatre firmes sont en concurrence. Cette situation est un cas particulier de la concurrence en prédation et en coopération étudiée avec n firmes à la section 4.2 Nous pouvons donc directement écrire les niveaux de promotion à l'équilibre :

$$\begin{aligned} \phi_i^*(4) &= \frac{4p\beta(1+p\eta^2)}{t} \text{ avec } i = 1,2,3,4, \\ \theta_i^*(4) &= \frac{p\eta}{4} \text{ avec } i = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{32}$$

Les profits d'équilibre sont alors de la forme suivante :

$$\Pi_i^*(4) = \frac{p}{32t^2}((8+7p\eta^2)t^2 - 256\beta^2 p(p\eta^2+1)^2) \text{ avec } i = 1,2,3,4. \tag{33}$$

Les demandes et les profits sont positifs si $t > \bar{t}(4)$, avec $\bar{t}(4) = \frac{16\sqrt{p(8+7p\eta^2)}(1+p\eta^2)\beta}{8+7p\eta^2}$. Nous limitons la suite de notre étude à $t > \bar{t}(4)$ car c'est la condition de viabilité de notre cadre de référence.

3.2.1. Fusion de deux firmes consécutives

Sans perte de généralité, nous supposons que les firmes 1 et 2 fusionnent (figure 2) :

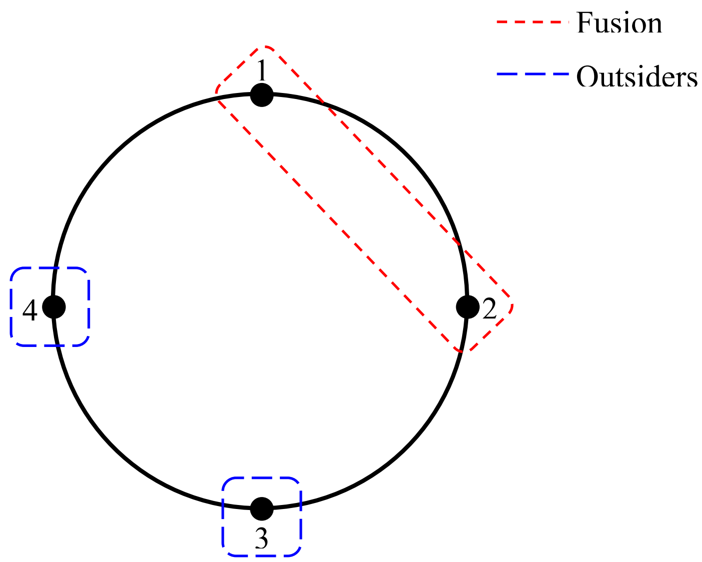

Figure 2 : industrie de quatre firmes : fusion consécutive

Le profit de la firme fusionnée est noté $\Pi_{12}^{12}(4)$ et celui des firmes hors fusion sont eux notés $\Pi_3^{12}(4)$ et $\Pi_4^{12}(4)$:

$$\begin{gathered}\Pi_{12}^{12}(4) = \Pi_1(4) + \Pi_2(4), \\ \Pi_i^{12}(4) = \Pi_i(4), \text{ pour } i = 3, 4.\end{gathered} \tag{34}$$

A l'équilibre[29], les niveaux de publicités sont définis comme tels :

$$\begin{gathered}\phi_i^{12*}(4) = \frac{p\beta t(2+3p\eta^2)}{t^2+8p^2\beta^2\eta^2} \text{ avec } i = 1, 2, \\ \phi_i^{12*}(4) = \frac{2p\beta t(2+3p\eta^2)}{t^2+8p^2\beta^2\eta^2} \text{ avec } i = 3, 4, \\ \theta_i^{12*}(4) = \frac{1}{2}\frac{p\eta(t^2-16\beta^2 p(1+p\eta^2))}{t^2+8p^2\beta^2\eta^2}, \text{ avec } i = 1, 2, \\ \theta_i^{12*}(4) = \frac{1}{4}\frac{p\eta(t^2+16\beta^2 p(1+2p\eta^2))}{t^2+8p^2\beta^2\eta^2} \text{ avec } i = 3, 4.\end{gathered} \tag{35}$$

Puisque les firmes ne peuvent se relocaliser, les contraintes de positivité des demandes sont identiques à l'expression (8). Nous vérifions leur positivité en annexe *2.1*. Avant de déterminer les profits d'équilibre, nous effectuons une analyse de statique comparative sur les variables stratégiques des firmes. Le tableau présenté en annexe *2.1* résume les résultats de statique pour des marchés de trois et quatre firmes. Concernant les publicités prédatrices, les influences des variables exogènes sont les mêmes qu'avant la fusion. Les variables p, β et

[29]Les conditions de premier ordre et de second ordre sont satisfaites.

η jouent positivement sur les niveaux de prédation. Ceci est intuitif puisqu'une élévation de p augmente la recette par unité vendue, une augmentation de β élève l'efficacité de la prédation elle-même et une hausse de η accroît la demande de marché, soit la recette pour une part de marché donnée. La variable t a un effet négatif sur la prédation puisque son augmentation engendre une diminution de l'intensité de la concurrence en augmentant la différenciation des produits. Concernant les publicités coopératives, les influences des variables exogènes diffèrent du cas pré-fusion. La publicité coopérative d'une firme est reliée à sa part de marché. Ainsi, avant la fusion, t et β n'avaient pas d'influence sur la coopération des firmes, celles-ci étant symétriques et ayant donc les mêmes parts de marché. Inversement, après fusion, les firmes de la fusion font moins de prédation que les firmes hors fusion. L'augmentation de t ou la diminution de β jouent à la hausse sur les parts de marché des firmes fusionnées et à la baisse sur les parts de marché des firmes hors fusion. Donc, l'augmentation de t ou la diminution de β influencent positivement le niveau de publicité coopérative des firmes fusionnées et négativement le niveau de publicité coopérative des firmes hors fusion. A propos des variables p et η, deux effets sur la publicité coopérative sont à distinguer. Elles ont un effet positif sur cette publicité puisque p est la recette par unité vendue et η est l'efficacité de la publicité coopérative. Mais un second effet indirect existe aussi. Les variables p et η jouent toutes deux positivement sur la publicité prédatrice des firmes mais avec plus d'impact sur celles des firmes hors fusion. De ce fait, les augmentations de p et η élèvent les parts de marché des firmes hors fusion et diminuent celles des firmes de la fusion. Ceci a tendance à faire augmenter la publicité coopérative des firmes hors fusion et à faire diminuer la publicité coopérative des firmes de la fusion. Lorsque t est assez grand, le premier effet l'emporte, le second étant un effet dépendant de la concurrence et que la concurrence est trop faible. Lorsque t est faible, le second effet peut l'emporter. La variable p ayant plus d'influence sur la recette d'une firme et donc sur sa dépense de publicité prédatrice, cette condition est suffisante pour que le second effet l'emporte en cas d'augmentation de p. Par contre, pour une augmentation de η, il faudra un niveau de p et de η minimum pour que les variables de prédation soient assez influencées par l'augmentation de η et ainsi pour que le second effet l'emporte.

Les profits d'équilibre, notés $\Pi_{12}^{12*}(4)$ et $\Pi_i^{12*}(4)$ $\forall i = 3,4$, sont alors de la forme suivante :

$$\Pi_{12}^{12*}(4)=\frac{p(1+p\eta^2)t^4-2\beta^2p^2(13\eta^4p^2+24\eta^2p+12)t^2-128\beta^4\eta^2p^4(1+p\eta^2(2+p\eta^2))}{2(t^2+8p^2\beta^2\eta^2)^2}$$
$$\Pi_{i}^{12*}(4)=\frac{p(8+11p\eta^2)t^4-32\beta^2p^2(8\eta^4p^2+11\eta^2p+4)t^2-256\beta^4\eta^2p^4(1+4p\eta^2(1+p\eta^2))}{32(t^2+8p^2\beta^2\eta^2)^2} \quad (36)$$

Nous vérifions dans l'annexe *2.1* que les profits d'équilibre, dans cette configuration d'industrie, sont positifs. Nous devons maintenant analyser les incitations à fusionner sous les conditions d'existence de notre cadre de référence. Soit $GF(4)$ le gain de fusion :

$$GF(4)=\Pi_{12}^{12*}(4)-\Pi_1^*(4)-\Pi_2^*(4). \quad (37)$$

Nous prouvons dans l'annexe *2.1* que le gain de fusion de deux firmes consécutives dans une industrie constituée de quatre firmes est positif. Il existe un gain à la fusion quels que soient les valeurs des paramètres. Néanmoins, une firme extérieure à la fusion, en d'autres terme un *outsider*, peut réaliser un gain dû à la baisse de la concurrence entraînée par la fusion. Soit $GO(4)$ la variation de profit d'un *outsider* avec $i=3,4$:

$$GO(4)=\Pi_i^{12*}(4)-\Pi_i^*(4). \quad (38)$$

Nous prouvons dans l'annexe *2.1* que le gain de l'*outsider* lors d'une fusion de deux firmes consécutives dans une industrie constituée de quatre firmes est positif. Or, un blocage à la fusion peut apparaître si le gain d'un *outsider* est supérieur au gain d'une firme participant à la fusion. Soit la fonction $HP(4)$ la différence entre ces deux gains. Sa positivité entraîne un mécanisme de blocage de la fusion :

$$HP(4)=\frac{GF(4)}{2}-GO(4). \quad (39)$$

Lemme 1 *Bien qu'il existe un gain de fusion pour deux firmes consécutives, cette fusion ne prend pas place car chaque firme extérieure à la fusion gagne plus que chacune de celles participant à celle-ci. Il y a ainsi hold-up.*
Preuve Se référer à l'annexe *2.1*.

3.2.2. Fusion de deux firmes non consécutives

Sans perte de généralité, nous supposons que les firmes 1 et 3 fusionnent (figure 3) :

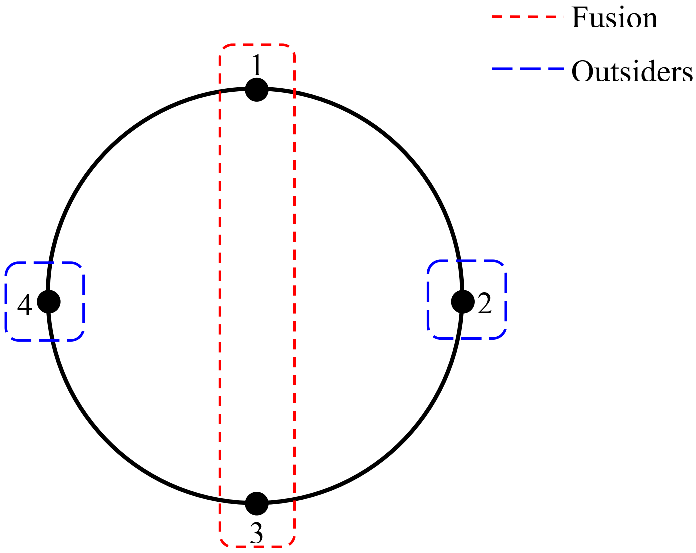

Figure 3 : industrie de quatre firmes : fusion non consécutive

Le profit de la firme fusionnée est noté Π_{13}^{13} et ceux des firmes hors fusion sont notés $\Pi_2^{13}(4)$ et $\Pi_4^{13}(4)$:

$$\begin{aligned} \Pi_{13}^{13}(4) &= \Pi_1(4) + \Pi_3(4), \\ \Pi_i^{13}(4) &= \Pi_i(4), \forall\, i = 2,4. \end{aligned} \tag{40}$$

A l'équilibre[30], les niveaux de publicités sont définis comme tels :

$$\begin{aligned} \phi_i^{13*}(4) &= \frac{2p\beta\left(2+3\,p\eta^2\right)}{t} \text{ avec } i = 1,3, \\ \phi_i^{13*}(4) &= \frac{2p\beta\left(2+3\,p\eta^2\right)}{t} \text{ avec } i = 2,4, \\ \theta_i^{13*}(4) &= \frac{1}{2}p\eta, \text{ avec } i = 1,3, \\ \theta_i^{13*}(4) &= \frac{1}{4}p\eta \text{ avec } i = 2,4. \end{aligned} \tag{41}$$

Puisque les firmes ne peuvent se relocaliser, les contraintes de positivité des demandes sont identiques à l'expression (8). Nous vérifions leur positivité en annexe *2.2*. Les profits d'équilibre, notés $\Pi_{13}^{13*}(4)$ et $\Pi_i^{13*}(4)$, $\forall i = 2,4$, sont alors de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_{13}^{13*}(4) &= \frac{p(1+p\eta^2)t^2 - 8\beta^2 p^2 (2+3p\eta^2)^2}{2t^2}, \\ \Pi_i^{13*}(4) &= \frac{p(8+11p\eta^2)t^2 - 64\beta^2 p^2 (2+3p\eta^2)^2}{32t^2}. \end{aligned} \tag{42}$$

Nous vérifions dans l'annexe *2.2* que ces profits ne sont tout deux positifs que si $t > t_{13}^{13}(4)$ avec $t_{13}^{13}(4) > \bar{t}(4)$. La fusion ne peut donc exister que si $t > t_{13}^{13}(4) > \bar{t}(4)$. Nous devons maintenant analyser les incitations à fusionner de façon non consécutive par rapport à celles à fusionner de façon consécutive. Nous devons simplement comparer les profits des deux firmes de la fusion de d'une paire de firmes consécutives à ceux de des deux firmes de la fusion d'une paire de firmes non consécutives. Soit $D(4)$ la différence de ces profits :

$$D(4) = \Pi_{12}^{12*} - \Pi_{13}^{13*}. \tag{43}$$

Lemme 2 *La fusion de deux firmes non consécutive est dominée par la fusion de deux firmes consécutives.*

Preuve Se référer à l'annexe *2.2*.

Ce résultat est intuitif dans le sens où, contrairement à le fusion de deux firmes consécutives, la fusion de deux firmes non consécutives ne permet pas de créer l'effet déjà évoqué de protection de marché. Les lemmes 1 et 2 permettent d'affirmer la proposition suivante :

Proposition 2 *Dans une industrie de quatre firmes, la fusion ne peut être initiée.*

Les effets responsables du blocage de la fusion sont du même type que ceux déjà évoqués dans le cas où le marché est constitué initialement de trois firmes, à la différence près qu'il y a deux *outsiders*. Ces deux firmes étant en concurrence directe, cela modifie quantitativement les effets mais pas qualitativement.

4. Hétérogénéité des *outsiders*

4.1. Marché de cinq firmes

Dans ce cas, il y a trois *outsiders* si une fusion se produit. Mais que la fusion se fasse entre deux firmes consécutives ou non, les *outsiders* sont hétérogènes. Nous devons établir une situation de référence où les cinq firmes sont en concurrence. Cette situation est un cas particulier de la concurrence en prédation et en coopération étudiée avec n firmes à la section 4.2. Nous pouvons donc directement écrire les niveaux de promotion à l'équilibre :

$$\begin{gathered} \phi_i^*(5) = \frac{5p\beta(1+p\eta^2)}{t} \text{ avec } i = 1,2,3,4,5, \\ \theta_i^*(5) = \frac{p\eta}{5} \text{ avec } i = 1,2,3,4,5. \end{gathered} \tag{44}$$

[30]Les conditions de premier ordre et de second ordre sont satisfaites.

Les profits d'équilibre sont alors de la forme suivante :

$$\Pi_i^*(5) = \frac{p}{50t^2}\left((10+9p\eta^2)t^2 - 625p\beta^2(p\eta^2+1)^2\right) \text{avec } i = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{45}$$

Les demandes et les profits sont positifs si $t > \bar{t}(5)$, avec $\bar{t}(5) = \frac{25\sqrt{\left(10+9p\eta^2\right)p}\left(1+p\eta^2\right)\beta}{10+9p\eta^2}$. Nous limitons la suite de notre étude à $t > \bar{t}(5)$ car sinon, le cadre de référence n'est pas viable.

4.1.1. Fusion de deux firmes consécutives

Sans perte de généralité, nous supposons que les firmes 1 et 2 fusionnent (figure 4) :

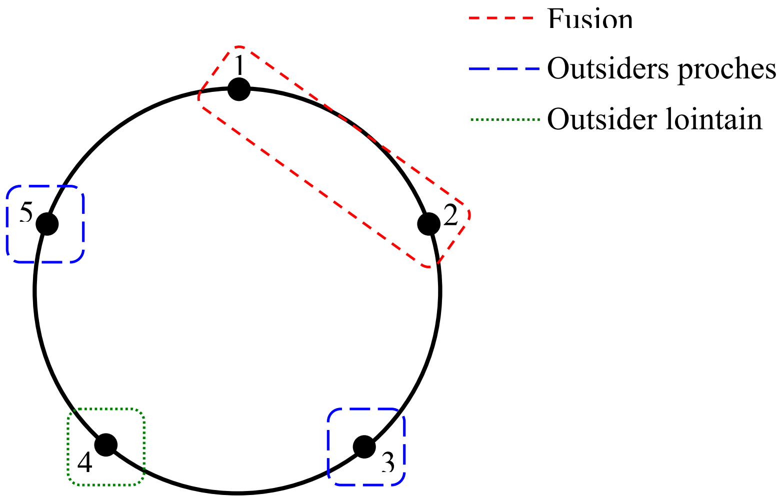

Figure 4 : industrie de cinq firmes : fusion consécutive

Le profit de la firme fusionnée est noté Π_{12}^{12} et ceux des firmes hors fusion sont notés $\Pi_3^{12}(5)$, $\Pi_4^{12}(5)$ et $\Pi_5^{12}(5)$:

$$\begin{aligned} \Pi_{12}^{12}(5) &= \Pi_1(5) + \Pi_2(5), \\ \Pi_i^{12}(5) &= \Pi_i(5), \text{ pour } i = 3, 4, 5. \end{aligned} \tag{46}$$

A l'équilibre[31], les niveaux de publicités sont définis comme tels :

[31]Les conditions de premier ordre et de second ordre sont satisfaites.

$$\phi_i^{12*}(5)=\frac{p\beta t\left(5+7p\eta^2\right)}{2t^2+25p^2\eta^2\beta^2} \text{ avec } i=1,2,$$

$$\phi_i^{12*}(5)=\frac{2p\beta t\left(5+7p\eta^2\right)}{2t^2+25p^2\eta^2\beta^2} \text{ avec } i=3,4,5,$$

$$\theta_i^{12*}(5)=\frac{1}{5}\frac{p\eta(4t^2-125\beta^2p(1+p\eta^2))}{2t^2+25p^2\beta^2\eta^2}, \text{ avec } i=1,2, \tag{47}$$

$$\theta_i^{12*}(5)=\frac{1}{10}\frac{p\eta(4t^2+25p\beta^2(5+9p\eta^2))}{2t^2+25p^2\eta^2\beta^2} \text{ avec } i=3,5,$$

$$\theta_4^{12*}(5)=\frac{p\eta}{5}.$$

Puisque les firmes ne peuvent se relocaliser, les contraintes de positivité des demandes sont identiques l'expression (8). Nous vérifions leur positivité en annexe *3.1*. Les profits d'équilibre, notés $\Pi_{12}^{12*}(5)$ et $\Pi_i^{12*}(5)$ et $\Pi_4^{12*}(5)$ pour $i=3,5$, sont alors de la forme suivante :

$$\Pi_{12}^{12*}(5)=\frac{8p(1+p\eta^2)t^4-5p^2\beta^2(75+150p\eta^2+79p^2\eta^4)t^2-3125p^4\beta^4\eta^2(1+p\eta^2)^2}{5\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^2}$$

$$\Pi_i^{12*}(5)=\frac{16p(10+13p\eta^2)t^4-200p^2\beta^2(25+65p\eta^2+44p^2\eta^4)t^2-625p^4\beta^4\eta^2(p\eta^2(90+81p\eta^2)+25)}{200\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^2} \tag{51}$$

$$\Pi_4^{12*}(5)=\frac{4p(10+13p\eta^2)t^4-100p^2\beta^2(65p\eta^2+43p^2\eta^4+25)t^2-625p^6\beta^4\eta^6}{50\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^2}$$

Nous étudions la positivité des profits d'équilibre dans l'annexe *3.1*. Si la fusion se produit, la firme 4 sort du marché si $t<t_4^{12}(5)$. Nous nous limitons à $t\geq t_4^{12}(5)>\bar{t}(5)$ pour le calcul des profits de la fusion et des *outsiders*[32]. Nous devons maintenant analyser les incitations à fusionner dans notre cadre de référence. Soit $GF(5)$ le gain de fusion :

$$GF(5)=\Pi_{12}^{12*}-\Pi_1^*-\Pi_2^*. \tag{48}$$

Nous prouvons dans l'annexe *3.1* que le gain de fusion de deux firmes consécutives dans une industrie constituée de cinq firmes est positif. Il existe un gain à la fusion quels que soient les valeurs des paramètres. Néanmoins, une firme *outsider* peut réaliser un gain dû à la baisse de la concurrence entraînée par la fusion. Ici, nous avons deux types d'*outsiders*. Les firmes 3 et 5, qui sont en concurrence directe avec les firmes de la fusion seront appelés les *outsiders proches*. La firme 4, qui n'est pas en concurrence directe avec les firmes de la fusion mais avec les deux autres *outsiders*, sera appelée « *outsider* lointain. » Soit $GO(5)^p$ la variation de profit d'un *outsider proche* avec $i=3,5$ et $GO(5)^l$ la variation de profit de l'*outsider* lointain

[32]En effet, lorsque la firme *outsider* lointaine est exclue,celle-ci réalise nécessairement une perte puisqu'elle sort

avec $i = 4$:

$$GO^p(5) = \Pi_i^{12*}(5) - \Pi_i^*(5), \tag{49}$$

$$GO^l(5) = \Pi_i^{12*}(5) - \Pi_i^*(5). \tag{50}$$

Nous prouvons dans l'annexe *4* que le gain d'un « *outsider* proche » dans une industrie constituée de cinq firmes est positif. Nous prouvons aussi dans l'annexe *3.1* que le gain de l'*outsider* lointain dans une industrie constituée de cinq firmes est négatif si $\bar{t}(5) < t < t_3$ (avec $t_3 > t_4^{12}(5)$) et positif si $t \geq t_3$. Soit la fonction $HP(5)$ la différence entre le gain d'une firme participant à la fusion et le gain d'un *outsider*. Sa positivité entraîne un mécanisme de *hold-up*. Il existe ici deux types d'*outsiders* et donc il peut exister deux types de *hold-up*. Notons $HP^p(5)$ celui relatif aux *outsiders* proches et $HP^l(5)$ celui relatif aux *outsiders* lointains :

$$HP^p(5) = \frac{GF(5)}{2} - GO^p(5), \tag{51}$$

$$HP^l(5) = \frac{GF(5)}{2} - GO^l(5). \tag{52}$$

Nous prouvons dans l'annexe *3.1* que la fusion procure plus de gain à un *outsider* proche qu'à une firme de la fusion. De même, nous prouvons dans l'annexe *3.1* que la fusion procure moins de gain (voire une perte) à un *outsider* lointain qu'à une firme de la fusion lorsque la différenciation des biens n'est pas trop forte ($t \leq t_4$). Nous en déduisons le lemme suivant :

Lemme 3 *Bien que les outsiders proches de la fusion gagnent plus avec la fusion que les firmes y participant, les firmes sont quand même incitées à fusionner pour éviter de devenir outsider lointain, celui-ci réalisant moins de gain que toutes les autres firmes de l'industrie si la différenciation est assez faible. Il n'y a donc pas de mécanisme de hold-up dans ce cas de figure. Le mécanisme de hold-up existe seulement si la différenciation des biens est assez forte (i.e. pour $t > t_4$).*

4.1.2. Fusion de deux firmes non consécutives

Sans perte de généralité, nous supposons que ce sont les firmes 1 et 3 qui fusionnent, comme cela est schématisé dans la figure 5 ci-après. Notons que deux *outsiders* sont symétriques. Nous les nommons « *outsiders* groupés » en raison de leur positionnement sur le marché. L'autre *outsider* est appelé « *outsider* isolé », toujours en raison de son positionnement.

---

du marché.

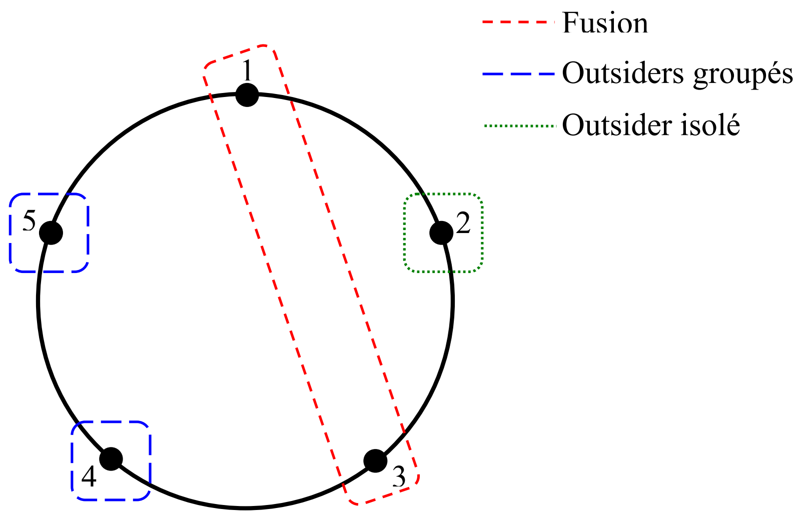

Figure 5 : industrie de cinq firmes : fusion non consécutive

Le profit de l'entité fusionnée est noté Π_{13}^{13} et celui des firmes hors fusion sont eux notés $\Pi_2^{13}(5)$ et $\Pi_4^{13}(5)$ et $\Pi_5^{13}(5)$:

$$\begin{aligned} \Pi_{13}^{13}(5) &= \Pi_1(5)+\Pi_3(5), \\ \Pi_i^{13}(5) &= \Pi_i(5), \text{ pour } i=2,4,5. \end{aligned} \tag{53}$$

A l'équilibre[33], les niveaux de publicités sont définis comme tels :

$$\begin{aligned} \phi_i^{13*}(5) &= \frac{p\beta\left(5+7p\eta^2\right)}{t} \text{ avec } i=1,2,3,4,5, \\ \theta_i^{13*}(5) &= \frac{2}{5}p\eta, \text{ avec } i=1,3, \\ \theta_i^{13*}(5) &= \frac{1}{5}p\eta \text{ , avec } i=2,4,5. \end{aligned} \tag{54}$$

Puisque les firmes ne peuvent se relocaliser, les contraintes de positivité des demandes sont identiques l'expression (8). Nous vérifions les contraintes de positivité des demandes dans l'annexe *3.2*. Les profits d'équilibre, notés $\Pi_{13}^{13*}(5)$ et $\Pi_i^{13*}(5)$, $\forall i=2,4,5$ sont alors de la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Pi_{13}^{13*}(5) &= \frac{p(2+2p\eta^2)t^2-5p^2\beta^2(25+70p\eta^2+49p^2\eta^4)}{5t^2}, \\ \Pi_i^{13*}(5) &= \frac{p(10+13p\eta^2)t^2-25p^2\beta^2(25+69p\eta^2+49p^2\eta^4)}{50t^2}. \end{aligned} \tag{55}$$

[33] Les conditions de premier ordre et de second ordre sont satisfaites.

Nous montrons dans l'annexe *3.2* que la fusion n'est envisageable que si $t \geq t_4 > \bar{t}(5)$. Pour ces valeurs de différentiation, les *outsiders* réalisent aussi un profit positif. Nous devons maintenant analyser les incitations à fusionner de façon non consécutive par rapport à celles à fusionner de façon consécutive. Il suffit de faire la différence entre le profit de la fusion de deux firmes consécutives avec le profit de fusion de deux firmes non consécutives. Appelons cette différence $D(5)$:

$$D(5) = \Pi_{12}^{12*}(5) - \Pi_{13}^{13*}(5). \tag{56}$$

Lemme 4 *La fusion de deux firmes non consécutive est dominée par la fusion de deux firmes consécutives.*

Preuve Se référer à l'annexe *3.2*.

Les lemmes 3 et 4 permettent d'affirmer la proposition suivante :

Proposition 3 *Dans une industrie de cinq firmes, une fusion de deux firmes consécutives est initiée si* $t \leq t_4$.

Ce résultat est intuitif dans le sens où, contrairement à le fusion de deux firmes consécutives, la fusion de deux firmes non consécutives ne permet pas de créer l'effet déjà évoqué de protection de marché. Les effets de la fusion sur les niveaux de publicité de la firme fusionnée sont les mêmes que ceux déjà évoqués précédemment. Les deux firmes *outsiders* proches profitent de la baisse de l'agressivité concurrentielle des firmes participant à la fusion pour augmenter leurs niveaux de publicité prédatrice, ce qui a pour effet de leur faire gagner des parts de marché à moindre coût. Relativement à cette augmentation de parts de marché, elles augmentent leurs niveaux de publicité coopérative car elles profitent mieux de l'augmentation de la taille du marché. La firme *outsider* lointaine, quant à elle, doit augmenter sa publicité prédatrice pour conserver sa part de marché puisqu'elle est en concurrence directe avec les *outsiders* proches. Comme sa part de marché est inchangée, elle conserve le même niveau de publicité coopérative.

La firme fusionnée réalise bien un gain à la fusion puisqu'elle monopolise une partie du marché et annule en partie les effets du *"free riding"* portant sur la coopération. Les *outsiders* proches réalisent des gains plus importants car ils gagnent des parts de marché à moindre coût, relient leurs publicités coopératives à leurs nouvelles parts de marché et profitent du comportement plus coopératif de la firme fusionnée. Il est donc plus bénéfique d'être un *outsider* proche de la fusion que de participer à celle-ci. Par contre, même si l'*outsider* lointain profite de la coopération accrue due à la fusion, il doit dépenser plus en prédation sans pour autant gagner de parts de marché. Ceci a pour effet de le rendre perdant en terme de variation de profit par rapport aux autres firmes si $t \leq t_4$. Il réalise même moins de profit qu'avant la fusion si la concurrence est assez vive, c'est à dire si la différenciation est assez faible ($t < t_3$). Ainsi, la fusion est réalisée car les firmes préfèrent participer à la fusion que devenir *outsider* lointain de celle-ci.

4.2. Généralisation

L'analyse de la fusion a été effectuée pour des industries constituées initialement de trois, quatre, puis cinq firmes. Pour des industries de taille égale ou supérieure à cinq firmes, la fusion d'une paire de firmes rend inéluctablement les *outsiders* hétérogènes. Une fusion de deux firmes consécutives est plus bénéfique à ses participants qu'une fusion de deux firmes non consécutives puisque cette dernière ne permet pas d'obtenir l'effet de protection de marché. Ainsi, en nous concentrant sur les fusions de paires de firmes consécutives, nous pouvons généraliser les résultats concernant les incitations à fusionner pour des industries de tailles quelconques. Nous reprenons la notation n pour le nombre de firmes initial dans l'industrie, avec, $n \geq 5$. Nous nous intéressons à la fusion d'une paire de firmes consécutives. Sans perte de généralité, nous supposons que ce sont les firmes 1 et 2 qui fusionnent. En effet, les autres paires de firmes possibles représentent des cas symétriques à celui-ci. Le profit de la firme fusionnée est noté $\Pi_{12}^{12}(n)$, et ceux des firmes hors fusion sont notés $\Pi_i^{12}(n)$.

$$\begin{aligned} \Pi_{12}^{12}(n) &= \Pi_1(n) + \Pi_2(n), \\ \Pi_i^{12}(n) &= \Pi_i(n), \text{ pour } i = 3, \ldots n. \end{aligned} \tag{57}$$

A l'équilibre[34], les niveaux de publicités sont définis comme tels :

$$\begin{aligned} \phi_i^{12*}(n) &= \frac{pt\beta\left(n+(n+2)p\eta^2\right)}{2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2} \text{ avec } i = 1,2, \\ \phi_i^{12*}(n) &= \frac{2pt\beta\left(n+(n+2)p\eta^2\right)}{2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2} \text{ avec } i = 3,\ldots,n, \\ \theta_i^{12*}(n) &= \frac{1}{n}\frac{p\eta(4t^2-n^3p\beta^2(1+p\eta^2))}{2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2}, \text{ avec } i = 1,2, \\ \theta_i^{12*}(n) &= \frac{1}{2n}\frac{p\eta(4t^2+n^2p\beta^2(n+(n+4)p\eta^2))}{2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2} \text{ avec } i = 3,n, \\ \theta_i^{12*}(n) &= \frac{p\eta}{n} \text{ avec } i = 4,\ldots,n-1. \end{aligned} \tag{58}$$

Puisque les firmes ne peuvent se relocaliser, les contraintes de positivité des demandes sont

[34]Les conditions de premier ordre et de second ordre sont satisfaites.

identiques à l'expression (8). Nous vérifions leur positivité en annexe *4*. Avant de déterminer les profits d'équilibre, nous effectuons une analyse de statique comparative sur les variables stratégiques des firmes. Le tableau présenté en annexe *4* résume les résultats de statique comparative pour des marchés constitués initialement de n firmes. Les résultats et les intuitions sont identiques à ceux concernant le paragraphe de statique comparative pour une industrie de quatre firmes dans la section 3.2 sauf qu'il y a maintenant au moins une firme *outsider* lointaine. Les firmes *outsiders* lointaines ont des niveaux de publicité prédatrice identiques à celles des autres firmes *outsiders.* Ainsi, les résultats de statique comparative concernant la publicité prédatrice sont identiques pour toutes les firmes de l'industrie. Par contre, les firmes *outsiders* lointaines gardent la même part de marché qu'avant la fusion. Leurs niveaux de coopération sont donc identiques à ceux des firmes symétriques avant la fusion. Ainsi, les résultats de statique comparative concernant la publicité coopérative des firmes *outsiders* lointaines et leurs interprétations sont les mêmes que pour les firmes de l'industrie pré-fusion. Enfin, une autre variable de statique est introduite, il s'agit du nombre initial n de firmes dans l'industrie. Lorsque n s'accroît, toutes les firmes font plus de dépenses de publicité prédatrice en raison de l'augmentation de la concurrence. Inversement, lorsque n augmente, les parts de marché des firmes diminuent et ces dernières ont donc tendance à faire moins de publicité coopérative. Les profits d'équilibre, notés $\Pi_{12}^{12*}(n)$ et $\Pi_i^{12*}(n)$ et $\Pi_j^{12*}(n)$ pour $i=3,n$ et $j=4,...,n-1$, sont alors de la forme suivante :

$$\Pi_{12}^{12*}(n)=\frac{8p(1+p\eta^2)t^4-np^2\beta^2(3n^2(1+p\eta^2)^2+4p^2\eta^4)t^2-n^5p^4\beta^4\eta^2(1+p\eta^2)^2}{n\left(2t^2+n^2p^2\eta^2\beta^2\right)^2}, \tag{59}$$

$$\Pi_i^{12*}(n)=\frac{16p(2n+(2n+3)p\eta^2)t^4-8n^2p^2\beta^2(n^2+n(2n+3)p\eta^2+(4+n(n+3))p^2\eta^4)t^2}{8n^2\left(2t^2+n^2p^2\eta^2\beta^2\right)^2} \tag{60}$$

$$-\frac{n^4p^4\beta^4\eta^2(n+(n+4)p\eta^2)^2}{8n^2\left(2t^2+n^2p^2\eta^2\beta^2\right)^2},$$

$$\Pi_j^{12*}(n)=\frac{16p(2n+(2n+3)p\eta^2)t^4-16n^2p^2\beta^2(\eta^2+n(2n+3)p\eta^2}{8n^2\left(2t^2+n^2p^2\eta^2\beta^2\right)^2} \tag{61}$$

$$+\frac{(3+n(n+3))p^2\eta^4)t^2-4n^4p^6\beta^4\eta^6}{8n^2\left(2t^2+n^2p^2\eta^2\beta^2\right)^2}.$$

Nous étudions la positivité des profits d'équilibre dans l'annexe *4*. Si la fusion se produit, au moins une firme *outsider* lointain sort du marché $t<t_j^{12}(n)$. Soit $GF(n)$ le gain de fusion :

$$GF(n) = \Pi_{12}^{12*}(n) - \Pi_1^*(n) - \Pi_2^*(n). \tag{62}$$

Nous prouvons dans l'annexe *4* que le gain de fusion de deux firmes consécutives dans une industrie constituée de n firmes est positif. Il existe un gain à la fusion quels que soient les valeurs des paramètres. Une firme extérieure à la fusion, que nous appelons *outsider*, peut réaliser un gain dû à la baisse de la concurrence entraînée par la fusion. Ici, nous avons deux types d'*outsiders*. Les firmes 3 et 5, qui sont en concurrence directe avec les firmes de la fusion seront appelés les *outsiders* proches. Les firmes 4 à $n-1$, qui ne sont pas en concurrence directe avec les firmes de la fusion, seront appelés *outsiders* lointains. Soit $GO^p(n)$ la variation de profit d'un *outsider* proche avec $i = 3,5$ et $GO^l(n)$ la variation de profit d'un *outsider lointain* avec $i = 4,...,n-1$:

$$GO^p(n) = \Pi_i^{12*}(n) - \Pi_i^*(n), \tag{63}$$

$$GO^l(5) = \Pi_i^{12*}(n) - \Pi_i^*(n). \tag{64}$$

Nous prouvons dans l'annexe *4* que le gain lié à la fusion d'un *outsider* proche dans une industrie initialement constituée de n firmes est positif. Nous prouvons aussi dans l'annexe *4* que le gain lié à la fusion d'un *outsider* lointain dans une industrie constituée de n firmes est négatif si $\bar{t}(n) < t < t_9$ (avec $t_9 > t_j^{12}(n)$) et positif si $t \geq t_9$. Un blocage à la fusion peut apparaître si le gain d'un *outsider* est supérieur au gain d'une firme participant à la fusion. Soit la fonction $HP(n)$ la différence entre ces deux gains. Sa positivité entraîne un mécanisme de blocage de la fusion appelé mécanisme de *hold-up* dans la littérature sur les fusions. Il existe ici deux types d'*outsiders* et donc il peut exister deux types de *hold-up*. Notons $HP^p(n)$ celui relatif aux *outsiders* proches et $HP^l(n)$ celui relatif aux *outsiders* lointains :

$$HP^p(n) = \frac{GF(n)}{2} - GO^p(n), \tag{65}$$

$$HP^l(n) = \frac{GF(n)}{2} - GO^l(n). \tag{66}$$

Nous prouvons dans l'annexe *4* que la fusion procure moins de gain à une firme participant à la fusion qu'à un *outsider* proche. Nous prouvons dans l'annexe *4* que la fusion procure moins de gain (voire une perte) à un *outsider* lointain qu'à une firme de la fusion si la différenciation des produits n'est pas trop forte ($t \leq t_{10}$). Nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition 4 *Dans une industrie à n firmes, il existe une incitation à former une fusion de* *deux firmes consécutives. Les firmes de la fusion réalisent en effet plus de gain que les firmes outsiders qui ne sont pas directement en concurrence avec la fusion si la différenciation est assez faible. Il n'y a donc pas de mécanisme de hold-up dans ce cas de figure. Le mécanisme de hold-up existe seulement si la différenciation des biens est assez forte (i.e. pour $t > t_{10}$).*

4.3. Analyse du bien être

La fusion n'est incitée que sous certaines conditions. Du point de vue des autorités de la concurrence, l'analyse du bien-être n'a donc lieu que pour ces conditions. Il s'agit des cas où au moins cinq firmes sont présentes initialement et où le coût de transport est inférieur à t_{10}. Nous pouvons aussi, pour simplifier, exclure de l'étude les valeurs du coût de transport inférieures à $t_j^{12}(n)$ puisque pour ces valeurs, la fusion exclut une firme de l'industrie et que cela induirait un saut dans la concentration du marché qui deviendrait plus forte. Ceci est contraire à la volonté des autorités de la concurrence. Nous nous intéressons tout d'abord au surplus des consommateurs. Celui ci peut être défini comme tel :

$$SC = (v - p - C + F)D, \tag{67}$$

avec C la somme des coûts de transport supportée par les consommateurs sur le marché de densité unitaire, F l'accroissement du à la prédation de la disponibilité à payer des consommateurs pour les biens qu'ils ont effectivement consommé et D la densité du marché. Nous indiquons SC, C, F et D par NF lorsque la fusion n'a pas eu lieu et par F lorsque la fusion a eu lieu. Ainsi, nous avons :

$$C_{NF} = 2nt5/2n2/n(x-2/n)^2\,dx = \frac{2nt}{3}(\frac{5}{2}n - \frac{2}{n})^3, \tag{68}$$

$$F_{NF} = \frac{p\beta n\left(1+p\eta^2\right)}{t}, \tag{69}$$

$$D_{NF} = 1 + \eta(i = 1n\theta_i) = 1 + p\eta^2, \tag{70}$$

$$C_F = 2t\hat{x}1/n(x-1/n)^2\,dx + 2t2/n\hat{x}(2/n - x)^2\,dx + 2t(n-2)5/2n2/n(x-2/n)^2\,dx, \tag{71}$$

avec $\hat{x} = \frac{6t^2 - p\beta^2\left(1+p\eta^2\right)n^3 + p^2\beta^2\eta^2 n^2}{2n\left(2t^2 + n^2 p^2\eta^2\beta^2\right)}$ la localisation du consommateur marginal entre la localisation de la firme 2 participant à la fusion et la firme 3 *outsider* proche de la fusion.

$$F_F = \frac{pt\beta(n + (2+n)p\eta^2)((4n-4)t^2 + n^3 p\beta^2(1+3p\eta^2))}{n\left(2t^2 + n^2p^2\eta^2\beta^2\right)^2}, \tag{72}$$

Le détail du calcul de F_F est donné dans l'annexe *4*.

$$D_F = 1+\eta(i=1n\theta_i) = \frac{2t^2\left(n+(n+2)p\eta^2\right)}{n\left(2t^2+n^2p^2\eta^2\beta^2\right)}. \tag{73}$$

La publicité prédatrice peut être vue comme une variable d'influence sur les consommateurs de nature plutôt persuasive ou au contraire plutôt informative. Si la publicité prédatrice est en partie persuasive, le consommateur ne retire pas autant d'utilité de la consommation du bien qu'il choisit que ce qu'il en attendait. Ceci doit pousser les autorités de la concurrence à intégrer un nouveau paramètre dans la fonction de surplus des consommateurs. Cette variable modélise alors une diminution de l'influence de la prédation dans l'utilité du consommateur lorsque la prédation n'est pas purement informative. Nous la nommerons α avec $0 \le \alpha \le 1$. Le surplus du consommateur est redéfini ainsi :

$$SC(\alpha) = (v-p-C+\alpha F)D. \tag{74}$$

Lorsque $\alpha = 1$, cela signifie que la publicité prédatrice est considérée comme purement informative. Lorsque $\alpha = 0$, cela signifie que la publicité prédatrice est considérée comme purement persuasive. Compte tenu du nombre de paramètres pris en compte dans ce modèle de caractère général, nous nous concentrerons ici sur le cas polaire où $\alpha = 0$. Autrement dit, nous adoptons la vue persuasive de la promotion (Braithwaite 1928, Robinson, 1933 et Kaldor, 1950). Soit $\Delta SC(0)$ la différence de surplus des consommateurs entre le cas fusionné et le cas non fusionné en supposant que la publicité prédatrice est vue comme totalement persuasive :

$$\begin{aligned} \Delta SC(0) &= (v-p-C_F)D_F - (v-p-C_{NF})D_{NF} \\ &= (v-p)(D_F - D_{NF}) - C_F D_F + C_{NF} D_{NF}. \end{aligned} \tag{75}$$

Nous prouvons dans l'annexe *4* que $C_{NF} < C_F$ et que $D_{NF} < D_F$. Ceci signifie que la fusion accroît les coûts de transports pour une densité unitaire de la demande mais accroît aussi la densité de la demande. Comme nous supposons un v assez grand tel que le marché soit couvert, il existe deux effets de la fusion sur le surplus des consommateur. Le coût de transport C augmente et a un effet négatif sur le surplus des consommateurs. Par contre, l'augmentation de la taille du marché, a un effet positif sur le surplus des consommateurs. Ainsi, il existe une valeur de v que nous noterons $v^*(n,t,p,\beta,\eta)$ tel que le surplus des consommateurs soit identique avant et après la fusion. La grandeur de $v^*(n,t,p,\beta,\eta)$ dépend de l'arbitrage entre les deux effets de la fusion sur le surplus des consommateurs.

Proposition 5 *Le surplus du consommateur est amélioré par la fusion si* $v > v^*(n,t,p,\beta,\eta)$ *et détérioré par la fusion si* $v < v^*(n,t,p,\beta,\eta)$.

Dans l'annexe 4, nous prouvons que $i = 1n\Pi_i^{12}(n) > i = 1n\Pi_i(n)$. Ainsi, le profit global de l'industrie augmente avec la fusion. Le bien-être collectif est la somme du surplus des consommateurs et des profits des firmes. Nous en déduisons qu'il existe une valeur de v inférieure à $v^*(n,t,p,\beta,\eta)$ et que nous noterons $v^{**}(n,t,p,\beta,\eta)$ tel que le bien-être collectif soit identique avant et après la fusion.

Proposition 6 *Le bien-être collectif est amélioré par la fusion si* $v > v^{**}(n,t,p,\beta,\eta)$ *et détérioré par la fusion si* $v < v^{**}(n,t,p,\beta,\eta)$.

Pour récapituler, notons que lorsque $v < v^{**}(n,t,p,\beta,\eta)$, la fusion dégrade à la fois le surplus des consommateurs et le bien-être collectif. Lorsque $v^{**}(n,t,p,\beta,\eta) < v < v^*(n,t,p,\beta,\eta)$, la fusion est globalement bénéfique aux firmes mais dégrade le surplus des consommateurs. Enfin, lorsque $v > v^*(n,t,p,\beta,\eta)$, la fusion améliore à la fois le surplus des consommateurs et le bien être collectif.

5. Conclusion

Ce modèle de différenciation horizontale étudie la concurrence en promotion et la relation entre fusion et promotion. Dans cette perspective, les stratégies de promotion diffèrent. En effet, la publicité coopérative vise à élever la demande de marché, alors que la publicité prédatrice d'une firme agit sur sa part de marché. Dans ce cadre d'analyse, plusieurs résultats apparaissent. Tout d'abord, la profitabilité de la publicité prédatrice s'élève avec les dépenses de publicité coopérative du concurrent, et celle de la publicité coopérative baisse avec les dépenses de publicité prédatrice de son concurrent. En outre, si le nombre de firmes initialement présent dans l'industrie est inférieur à cinq, la concurrence en promotion ne permet pas de supprimer le mécanisme de *hold-up* isolé par Brito (2003) dans un cadre de concurrence en prix. Par contre, pour des industries plus grandes nos résultats différent de ceux de Brito (2003). Pour certains niveaux de différenciation des biens, le mécanisme de *hold-up* disparaît et la fusion se produit mais pour d'autres degrés de différenciation et contrairement à Brito (2003), ce mécanisme persiste. Enfin, nous analysons l'effet des fusions sur le bien être collectif dans le cas particulier où la publicité prédatrice serait considérée comme purement persuasive et nous trouvons que les fusions, selon l'utilité brute que les consommateurs retirent de la consommation du bien en question, sont néfastes ou bénéfiques au bien-être collectif.

Ces analyses et résultats ont des implications dans divers domaines. Nous avons mis l'accent sur le fait que les stratégies de fusions et de promotion sont largement répandues. De plus, nous avons aussi mis en évidence que la dichotomie opérée par Friedman (1983a), et reprise ici, entre la promotion prédatrice et la promotion coopérative trouvait de nombreux échos dans la réalité empirique. Nous avons aussi fait un parallèle avec le cas particulier de l'industrie pharmaceutique en montrant que la publicité prédatrice pouvait être considérée comme la publicité orientée vers le médecin et la publicité coopérative, la publicité orientée vers le patient. En prenant en compte les caractéristiques des marchés auxquels appliquer cette étude, et notamment, la nature plus ou moins persuasive ou informative des publicités qui y sont pratiquées, notre analyse permet de tirer des implications sur les règles de décisions que devraient adopter les autorités de la concurrence vis à vis des fusions et acquisitions notamment. Certes, l'étude du surplus des consommateurs et du bien-être collectif est ici limitée au cas où la publicité est purement persuasive. Le fait de considérer une publicité plus informative constitue donc une piste de recherche. Notons aussi que la concurrence en prix n'a pas été considérée parallèlement à la concurrence en promotion. Ceci pourrait constituer des recherches futures. Une autre piste de recherche serait aussi de prendre en compte les synergies éventuelles que pourraient créer les fusions. De plus, dans un contexte où les gains d'efficacité sont possibles, des fusions englobant plus de deux firmes ou des vagues de fusions de paires de firmes pourraient trouver plus de légitimité. La prise en compte de toutes ces nouvelles configurations de fusions constituerait donc une autre piste de recherche.

6. Références

Advertising Expenditure Forecast, september 2012, http://www.zenithoptimedia.com/zenith/zenithoptimedia-releases-september-2012-advertising-expenditure-forecasts/.

Long Term Advertising Expenditure Forecast - predictions until 2018, février 2007, http://www.warc.com/.

Bagwell, K. 2005. The Economic Analysis of Advertising. Columbia University, Discussion Paper N° 0506-01.

Barros, P. P. et L. Sørgard. 2005. Merger in an Advertising-Intensive Industry. Working Paper.

Becker, G. S. et K. M. Murphy, 1993. A Simple Theory of Advertising as a Good or Bad. *Quarterly Journal of Economics, 942-64.*

Berndt, E. R., Bui L., Reiley D. et G. Urban. 1994. The Roles of Marketing, Product Quality and Price Competition in the Growth and Composition of the U.S Anti-Ulcer Drug Industry. National Bureau of Economic Research, Working Paper N° 49041-57.

Berndt, E. R., Bui L., Reiley D. et G. Urban. 1995. Information, Marketing, and Pricing in the U.S. Anti-Ulcer Drug Market. *AEA Papers and Proceedings*, 85 : 100-105.

Braithwaite, D. 1928. The Economic Effects of Advertisement. *Economic Journal*, 38, : 16-37.

Brekke, K. R. et M. Kuhn. 2006. Direct to Consumer Advertising in Pharmaceutical Markets. *Journal of Health Economics*, 25 : 102-130.

Brester, G. W. et T. C. Schroeder. 1995. The Impacts of Brand and Generic Advertising on Meat Demand. *American Journal of Agricultural Economics, 969-79.*

Brito, D. 2003. Preemptive Mergers under Spatial Competition. *International Journal of Industrial Organization*, 21 : 1601-1622.

Chintagunta, P. et N.J. Vilcassim, 1992, An empirical investigation of advertising strategies in a dynamic duopoly. *Management Science*, 38 (9): 1230-44.

Depken, C. A., Kamerschen, D. R. et A. Snow, 2002. Generic advertising in intermediate goods: theory and evidence free riding, *Review of Industrial Organization* 20, 205-220.

Ellis, R. P. et T. G. McGuire. 1986. Provider Behavior under Prospective Reimbursement: Cost Sharing and Supply. *Journal of Health Economics*, 5 : 129-151.

Friedman, J. W. 1983a. Oligopoly Theory. Cambridge University Press.

Friedman, J. W. 1983b. Advertising and Oligolistic Equilibrium. *Bell Journal of Economics*, 14 : 464-473.

Granier, L. et S. Trinquard, 2013b. Promotion Prédatrice et Coopérative sur le Marché des Médicaments, Working Paper GATE 2013.

Iizuka, T. et G. Z. Jin. 2005a. The Effect of Prescription Drugs Advertising on Doctor Visits, *Journal of Economics & Management Strategy*, 14 : 701-727.

Kaldor, N. 1950. The Economic Aspects of Advertising. *Review of Economic Studies*, 18 : 1-27.

Königbauer, I. 2007 Advertising and Generic Market Entry. *Journal of Health Economics*, 26 : 286-305.

Ma, J.et A. M. Ulph, 2003. Advertising in a Differentiated Duopoly and its Policy Implications for an Open Economy. University of Southampton, Discussion Paper N° 0406.

Manchanda, P. et P. K. Chintagunta, 2004. Responsiveness of Physician Prescription Behavior to Salesforce Effort: An Individual Level Analysis. *Marketing Letters*, 15 : 129-

145.

Mantovani, A. et G. Mion, 2002. Advertising and Endogenous Exit in a Differentiated Duopoly. Mimeo.

Mariel, P. et J. Sandonís. 2004. A Model of Advertising with Application to the German Automobile Industry. *Applied Economics*, 36 : 83-92.

Nichols, L. M. 1985. Advertising and Economic Welfare. *American Economic Review, 75 : 213-8.*

OCDE. 2001. Competition and Regulation Issues in the Pharmaceutical Industry. DAFFE/CLP(2000)29.

Ozga, S. A. 1960 Imperfect Markets Through Lack of Knowledge. *Quearterly Journal of Economics, 74 : 29-52.*

Piga, C. A. 1998. A Dynamic Model of Advertising and Product Differentiation. *Review of Industrial Organization*, 13 : 509-522.

Richard, O. et L. Van Horn. 2004. Persistence in Prescriptions of Branded Drugs. *International Journal of Industrial Organization*, 22 : 523-540.

Robinson, J. 1933. Economics of Imperfect Competition. London : MacMillan and Co.

Schmalensee, R. (1972) " The economics of advertising" Amsterdam: North Holland Publishing Co.

Slade, M. E. 1995. Product Rivalry with Multiple Strategic Weapons: An Analysis of Price and Advertising Competition. *Journal of Economics and Management Strategy*, 4 : 445-75.

Stigler, G. J. 1950. Monopoly and Oligopoly by Merger. *American Economic Review*, 40 : 23-35.

Stigler, G. J. 1961. The Economics of Information. *Journal of Political Economy*, 69 : 213-225.

Stigler, G. J. et G. S. Becker. 1977. De Gustibus Non Est Disputandum. *American Economic Review*, 67 : 76-90.

Telser, L. G. 1964. Advertising and Competition. *Journal of Political Economy*, 72 : 537-562.

Tirole, J. 1993. Théorie de l'Organisation Industrielle. Tome 1, *Economica*.

Tirole, J. 1995. Théorie de l'Organisation Industrielle. Tome 2, *Economica*.

Wilkes, M. S., Bell, R. A. et R. L. Kravitz. 2000. Direct-to-Consumer Prescription Drug Advertising: Trends, Impact, and Implications. *Health Affairs*, 19 : 110-128.

7. Annexes

1. Industrie composée de trois firmes :

1.1. Fusion d'une paire de firmes consécutives

Positivité des demandes

Pour $i=1,2$, la contrainte de positivité de la demande adressée à la firme 1 et 2 est vérifiée si $\phi_i^{12*}(3) > \frac{\phi_{-i}^{12*}(3)+\phi_3^{12*}(3)}{2} - \frac{t}{9\beta}$. Or, cette contrainte est satisfaite si $t > \frac{3}{2}\sqrt{3p(1+p\eta^2)}\beta$. Concernant la demande de la firme hors fusion, sa demande est positive si $\phi_3^{12*}(3) > \frac{\phi_2^{12*}(3)+\phi_1^{12*}(3)}{2} - \frac{t}{9\beta}$. Néanmoins, cette demande est positive si $t>0$. Par conséquent, toutes les firmes ont une demande positive si $t > \frac{3}{2}\sqrt{3p(1+p\eta^2)}\beta$. Or, $\bar{t}(3) > \frac{3}{2}\sqrt{3p(1+p\eta^2)}\beta$. La condition de viabilité de notre cadre de référence étant $t > \bar{t}(3)$, nous avons bien des demandes positives après la fusion.

Positivité des profits

Nous étudions le signe des profits d'équilibre. Pour cela, nous déterminons le signe de ces profits pour la valeur de t qui correspond à la borne inférieure de notre intervalle d'analyse. Nous dérivons ensuite les profits d'équilibre en fonction de t pour étudier leur sens de variation. Nous obtenons alors les résultats suivants :

Si $t=\bar{t}(3)$ alors :

$$\begin{aligned} \Pi_{12}^{12*}(3)\big|_{t=\bar{t}(3)} &= \frac{3(2+3p\eta^2)(3+2p\eta^2)^2(1+p\eta^2)^2 p}{(18+42p\eta^2+23p^2\eta^4)^2} > 0, \forall p, \forall\beta, \forall\eta, \\ \Pi_{3}^{12*}(3)\big|_{t=\bar{t}(3)} &= \frac{(2+3p\eta^2)(17p^2\eta^4+30p\eta^2+12)(3+2p\eta^2)^2 p}{2(18+42p\eta^2+23p^2\eta^4)^2} > 0, \forall p, \forall\beta, \forall\eta, \end{aligned} \tag{76}$$

De plus, $\Pi_{12}^{12*}(3)$ et $\Pi_{3}^{12*}(3)$ sont continus en t et :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{12}^{12*}(3)}{\partial t} &= \frac{2p^2t\beta^2(3+5p\eta^2)(9\beta^2p^3\eta^4+27p^2\beta^2\eta^2+22p\eta^2t^2+18t^2)}{(2t^2+9p^2\beta^2\eta^2)^3} > 0, \forall t, \forall p, \forall\beta, \forall\eta, \\ \frac{\partial \Pi_{3}^{12*}(3)}{\partial t} &= \frac{4p^3t\beta^2\eta^2(3+5p\eta^2)(63p^2\beta^2\eta^2+27\beta^2p+4t^2)}{(2t^2+9p^2\beta^2\eta^2)^3} > 0, \forall t, \forall p, \forall\beta, \forall\eta. \end{aligned} \tag{77}$$

Gain de fusion

La fonction $GF(3)$ est définie par :

$$GF(3) = \frac{4p^2\eta^2t^6 - 27p^2\beta^2(5p^2\eta^4 + 2p\eta^2 - 3)t^4}{9t^2(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)^2} + \frac{81p^4\beta^4\eta^2(22p^2\eta^4 + 48p\eta^2 + 27)t^2}{9t^2(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)^2} + \frac{6561p^6\beta^6\eta^4(1 + p\eta^2)^2}{9t^2(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)^2} \tag{78}$$

Le polynôme en t de degré 6 au numérateur de $GF(3)$ n'a pas de racine réelle. En calculant la valeur de $GF(3)$ pour des valeurs quelconques de paramètres, ici pour $t = p = \beta = \eta = 1$, nous obtenons $GF(3) = \frac{33997}{1089} > 0$. Ainsi, puisque $GF(3)$ est une fonction continue en t, nous en déduisons que $GF(3) > 0$, $\forall t, \forall p, \forall \beta, \forall \eta$.

Gain *outsider*

La fonction $GO(3)$ est définie par :

$$GO(3) = \frac{16p^2\eta^2t^6 + 108p^2\beta^2(\eta^2 p(\eta^2 p + 4) + 3)t^4}{18t^2(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)^2} + \frac{81p^4\beta^4\eta^2(p\eta^2(30 - 5p\eta^2) + 27)t^2}{18t^2(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)^2} + \frac{6561p^6\beta^6\eta^4(1 + p\eta^2)^2}{18t^2(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)^2}. \tag{79}$$

Le polynôme en t de degré 6 au numérateur de GO n'a pas de racine réelle. En calculant la valeur de GO pour $t = p = \beta = \eta = 1$, nous obtenons $GO(3) = \frac{15668}{1089} > 0$. Ainsi, puisque $GO(3)$ est une fonction continue en t, nous en déduisons que $GO(3) > 0$, $\forall t, \forall p, \forall \beta, \forall \eta$. L'*outsider* réalise un gain lorsque la fusion se produit quels que soient les valeurs des paramètres.

Hold-up

La fonction $HP(3)$ est définie par :

$$HP(3) = \frac{-p^2\eta^2t^4 - 81p^2\beta^2(1 + p\eta^2)^2t^2 + 243p^5\beta^4\eta^4(2 + 3p\eta^2)}{6(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)^2}. \tag{80}$$

Le polynôme en t de degré 4 au numérateur de $HP(3)$ a une seule racine réelle positive $t^{hp}(3) = \frac{3\sqrt{-18(1+p\eta^2)^2 + 2\sqrt{p\eta^2(225p^3\eta^6 + 420p^2\eta^4 + 486p\eta^2 + 324) + 81}}\beta}{4\eta}$. La différence $t^{hp}(3) - \bar{t}(3)$ est négative.

Ainsi, $HP(3)$ est toujours du même signe pour $t \geq \bar{t}(3)$. En effet, $HP(3)$ est une fonction continue en t et en calculant la valeur de $HP(3)$ pour $t = \bar{t}(3)$, nous obtenons $HP(3) = -\frac{(2+3p\eta^2)(14p^2\eta^4+24p\eta^2+9)(3+2p\eta^2)^2 p}{2(18+42p\eta^2+23p^2\eta^4)^2} < 0$. Ainsi, nous en déduisons que $HP(3) < 0$, $\forall t > \bar{t}(3)$.

1.2. Effets de la fusion sur les stratégies de promotion

Les firmes impliquées dans la fusion font moins de PODM une fois la fusion achevée. Pour $i = 1,2$:

$$\phi_i^*(3) - \phi_i^{12*}(3) = \frac{p\beta(t^2(3+p\eta^2) + 27p^2\beta^2\eta^2(1+p\eta^2))}{t(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)} > 0, \forall t, \forall p, \forall \beta, \forall \eta. \quad (81)$$

La firme non impliquée dans la fusion fait plus de PODM après que la fusion soit survenue :

$$\phi_3^*(3) - \phi_3^{12*}(3) = \frac{p^2\beta\eta^2(-4t^2 + 27p^2\beta^2\eta^2 + 27p\beta^2)}{t(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)} < 0, \forall t, \forall p, \forall \beta, \forall \eta. \quad (82)$$

En effet, cette fonction est continue et n'admet qu'une racine positive en t. Il s'agit de la racine en t du trinôme du second degré, dont l'expression est : $-4t^2 + 27p^2\beta^2\eta^2 + 27p\beta^2$. La différence est négative si t est supérieur à cette racine. Néanmoins, cette racine est inférieure à $\bar{t}(3)$ qui est la valeur minimale de t pour notre étude. En effet, cette racine est égale à $\frac{3}{2}\sqrt{3p(1+p\eta^2)}\beta$. Or, $\bar{t}(3) = \frac{9\sqrt{p(6+5p\eta^2)}(1+p\eta^2)\beta}{6p\eta^2+5}$ donc $\bar{t}(3) > \frac{3}{2}\sqrt{3p(1+p\eta^2)}\beta$. En conséquence, l'expression (82) est négative pour $t > \bar{t}(3)$.

Concernant la publicité coopérative, nous avons :

$$\theta_i^*(3) - \theta_i^{12*}(3) = \frac{p\eta(-2t^2 + 36p^2\beta^2\eta^2 + 27p\beta^2)}{3(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)} \text{ avec } i = 1,2. \quad (83)$$

Le signe de cette différence dépend de la racine en t du trinôme du second degré dont l'expression est $-2t^2 + 36p^2\beta^2\eta^2 + 27p\beta^2$. Notons cette racine $t^c(3) = \frac{3}{2}\sqrt{2p(3+4p\eta^2)}\beta$. De plus, cette racine est supérieure à $\bar{t}(3)$ qui est la valeur minimale de t pour notre étude. La fonction (83) est continue en t. Par conséquent, deux cas apparaissent :

- Si $\bar{t}(3) < t < t^c(3)$, les firmes impliquées dans la fusion font alors moins de PODC une fois la fusion achevée :

$$\theta_i^*(3) - \theta_i^{12*}(3) = \frac{p\eta(-2t^2 + 36p^2\beta^2\eta^2 + 27p\beta^2)}{3(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)} > 0 \text{ avec } i = 1,2.\text{et } \forall p, \forall \beta, \forall \eta. \quad (84)$$

- Si $t > t^c(3)$, les firmes impliquées dans la fusion font alors plus de PODC une fois la fusion achevée :

$$\theta_i^*(3) - \theta_i^{12*}(3) = \frac{p\eta(-2t^2 + 36p^2\beta^2\eta^2 + 27p\beta^2)}{3(2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2)} < 0 \text{ avec } i = 1,2.\text{et } \forall p, \forall \beta, \forall \eta. \quad (85)$$

La firme non impliquée dans la fusion fait plus de PODC après que la fusion soit survenue :

$$\theta_3^*(3) - \theta_3^{12*}(3) = \frac{-3p^2\beta^2\eta(3+5p\eta^2)}{2t^2 + 9p^2\beta^2\eta^2} < 0, \forall t, \forall p, \forall \beta, \forall \eta. \quad (86)$$

2. Industrie composée de quatre firmes :

2.1. Fusion d'une paire de firmes consécutives

Positivité des demandes

Pour $i = 1,2$, la contrainte de positivité de la demande adressée à la firme 1 et 2 est vérifiée si $\phi_i^{12*}(4) > \frac{\phi_{i-1}^{12*}(4) + \phi_{i+1}^{12*}(4)}{2} - \frac{t}{16\beta}$ $\forall i = 1,2$. Or, cette contrainte est satisfaite si $t > 4\sqrt{p(1+p\eta^2)}\beta$. Concernant la demande d'une firme hors fusion, elle est positive si $\phi_i^{12*}(4) > \frac{\phi_{i-1}^{12*}(4) + \phi_{i+1}^{12*}(4)}{2} - \frac{t}{16\beta}$. Néanmoins, cette demande est positive si $t > 0$. Par conséquent, toutes les firmes ont une demande positive si $t > 4\sqrt{p(1+p\eta^2)}\beta$. Or, $\bar{t}(4) > 4\sqrt{p(1+p\eta^2)}\beta$. La condition de viabilité de notre cadre de référence étant $t > \bar{t}(4)$, nous avons bien des demandes positives après la fusion.

Statique comparative

L'analyse de statique comparative des variables stratégiques des firmes après la fusion en fonction de t, p, β et η est résumée dans le tableau ci-dessous avec $n = 4$, $i = 1,2$, $j = 3,4$ et $t > \bar{t}(n)$. Les résultats sont identiques dans une industrie initialement composée de trois firmes avec $n = 3$, $i = 1,2$, $j = 3$ et $t > \bar{t}(n)$.

	$d\phi_i^{12*}(n)$	$d\phi_j^{12*}(n)$	$d\theta_i^{12*}(n)$	$d\theta_j^{12*}(n)$
dt	$-$	$-$	$+$	$-$
dp	$+$	$+$	$-$ pour $t < r_1(n)$ $+$ pour $t > r_1(n)$	$+$

$d\beta$	$+$	$+$	$-$	$+$
$d\eta$	$+$	$+$	$+$ si $p\eta^2 < s(n)$ $-$ pour $t < r_2(n)$ et $p\eta^2 > s(n)$ $+$ pour $t > r_2(n)$ et $p\eta^2 < s(n)$	$+$

Tableau 1 : statique comparative pour une fusion de deux firmes consécutives dans une industrie de trois ou quatre firmes

avec $r_1(n) = \frac{n\beta\sqrt{2p((2+3p\eta^2)n + 2p\eta^2 + \sqrt{(9p^2\eta^4 + 12p\eta^2 + 4)n^2 + (20p^2\eta^4 + 8p\eta^2)n + 4p^2\eta^4})}}{4}$,

$r_2(n) = \frac{n\beta\sqrt{2p((1+3p\eta^2)n + 2p\eta^2 + \sqrt{(9p^2\eta^4 + 6p\eta^2 + 1)n^2 + (20p^2\eta^4 - 4p\eta^2)n + 4p^2\eta^4})}}{4}$

et $s(n)$ la racine réelle positive du polynôme en x suivant : $(4n^3 + 6n^2 - 8n + 1)x^4 + (8n^3 + 14n^2 - 8n - 1)x^3 + (10n^2)x^2 + (2n^2 - 8n^3)x - 4n^3$.

Positivité des profits

Etudions le signe des profits d'équilibre. Pour cela, nous déterminons le signe de ces profits pour la valeur de t qui correspond à la borne inférieure de notre intervalle d'analyse. Nous dérivons ensuite les profits d'équilibre en fonction de t pour étudier leur sens de variation. Nous obtenons alors les résultats suivants :

Si $t = \bar{t}(4)$ alors et pour $i = 3,4$, $\forall p, \forall \beta, \forall \eta$:

$$\begin{aligned} \Pi_{12}^{12*}(4)\big|_{t=\bar{t}(4)} &= \frac{(8 + 11p\eta^2)(3p\eta^2 + 4)^2(1 + p\eta^2)^2 p}{(39p^2\eta^4 + 72p\eta^2 + 32)^2} > 0, \\ \Pi_i^{12*}(4)\big|_{t=\bar{t}(4)} &= \frac{(6p^2\eta^4 + 8 + 15p\eta^2)(138\eta^6 p^3 + 417p^2\eta^4 + 408p\eta^2 + 128)p}{8(39p^2\eta^4 + 72p\eta^2 + 32)^2} > 0. \end{aligned} \tag{87}$$

De plus, $\Pi_{12}^{12*}(4)$ et $\Pi_i^{12*}(4)$, $\forall i = 3,4$, sont continus en t et pour $t > \bar{t}(4)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{12}^{12*}(4)}{\partial t} &= \frac{2p^2 t\beta^2(2 + 3p\eta^2)(8\beta^2 p^3\eta^4 + 16p^2\eta^2\beta^2 + 7p\eta^2 t^2 + 6t^2)}{(t^2 + 8p^2\eta^2\beta^2)^3} > 0, \forall p, \forall \beta, \forall \eta, \\ \frac{\partial \Pi_3^{12*}(4)}{\partial t} &= -\frac{p^2 t\beta^2(2 + 3p\eta^2)(16p^2\eta^2\beta^2 - 9p\eta^2 t^2 - 4t^2)}{(t^2 + 8p^2\eta^2\beta^2)^3} > 0, \forall p, \forall \beta, \forall \eta. \end{aligned} \tag{88}$$

Le trinôme en t du second degré $16p^2\eta^2\beta^2 - 9p\eta^2 t^2 - 4t^2 < 0$ si $t > \frac{4\beta\eta p}{\sqrt{9p\eta^2 + 4}}$ ou $t < \frac{-4\beta\eta p}{\sqrt{9p\eta^2 + 4}}$.

Or, $\bar{t}(4) > \frac{4\beta\eta p}{\sqrt{9p\eta^2+4}}$. Nous pouvons donc en déduire que les profits réalisés dans cette configuration de l'industrie sont positifs.

Gain de fusion

La fonction $GF(4)$ est définie par :

$$GF(4) = \frac{p^2\eta^2 t^6 + 64p^2\beta^2(1-p^2\eta^4)t^4}{16t^2\left(t^2+8p^2\eta^2\beta^2\right)^2} + \frac{64p^4\beta^4\eta^2(p\eta^2(41p\eta^2+88)+48)t^2}{16t^2\left(t^2+8p^2\eta^2\beta^2\right)^2} + \frac{16384p^6\beta^6\eta^4(1+p\eta^2(2+p\eta^2))}{16t^2\left(t^2+8p^2\eta^2\beta^2\right)^2}. \tag{89}$$

Le polynôme en t de degré 6 au numérateur de $GF(4)$ n'a pas de racine réelle. En calculant la valeur de $GF(4)$ pour des valeurs quelconques de paramètres, ici pour $t = p = \beta = \eta = 1$, nous obtenons $GF(4) = \frac{76865}{1296} > 0$. Ainsi, puisque $GF(4)$ est une fonction continue en t, nous en déduisons que $GF(4) > 0$, $\forall t, \forall p, \forall \beta, \forall \eta$.

Gain des *outsiders*

La fonction $GO(4)$ est définie par :

$$GO(4) = \frac{p^2\eta^2 t^6 + 4p^2\beta^2(p\eta^2(2-7p\eta^2)+8)t^4}{8\left(t^2+8p^2\eta^2\beta^2\right)^2 t^2} + \frac{16p^4\beta^4\eta^2(p\eta^2(41p\eta^2+104)+60)t^2}{8\left(t^2+8p^2\eta^2\beta^2\right)^2 t^2} + \frac{4096p^6\beta^6\eta^4\left(p\eta^2(p\eta^2+2)\right)}{8\left(t^2+8p^2\eta^2\beta^2\right)^2 t^2}. \tag{90}$$

Le polynôme en t de degré 6 au numérateur de $GO(4)$ n'a pas de racine réelle. En calculant la valeur de $GO(4)$ pour $t = p = \beta = \eta = 1$, nous obtenons $GO(4) = \frac{15668}{1089} > 0$. Ainsi, puisque $GO(4)$ est une fonction continue en t, nous en déduisons que $GO(4) > 0$, $\forall t, \forall p, \forall \beta, \forall \eta$. L'*outsider* réalise un gain lorsque la fusion se produit quels que soient les valeurs des paramètres.

Hold-up

Les lemmes 1 et 2 montrent la positivité de $GF(4)$ et de $GO(4)$. La fonction $HP(4)$ est définie par :

$$HP(4)=\frac{-3\eta^2t^4-16\beta^2(p\eta^2(2-3p\eta^2)+4)t^2-256p^2\beta^4\eta^2(4p\eta^2+3)}{32\left(t^2+8p^2\eta^2\beta^2\right)^2}. \tag{91}$$

Le polynôme en t de degré 4 au numérateur de $HP(4)$ a une seule racine réelle positive. Il s'agit de $t^{hp}(4)=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{3p^2\eta^4-4-2p\eta^2+\sqrt{9p^4\eta^8-56p^2\eta^4-60\eta^6p^3+16+16p\eta^2}}\beta}{3\eta}$. La différence $t^{hp}(4)-\bar{t}(4)$ est négative. Ainsi, $HP(4)$ est toujours du même signe pour $t\geq\bar{t}(4)$. En effet, $HP(4)$ est une fonction continue en t et en calculant la valeur de $HP(4)$ pour $t=\bar{t}(4)$, nous obtenons $HP(4)=\frac{-\left(512+2688p\eta^2+5424p^2\eta^4+5251\eta^6p^3+2436p^4\eta^8+432p^5\eta^{10}\right)p}{8\left(32+72p\eta^2+39p^2\eta^4\right)^2}<0$. Ainsi, nous en déduisons que $HP(4)<0$, $\forall t>\bar{t}(4)$.

2.2. Fusion d'une paire de firmes non consécutives

Positivité demandes

Pour $i=1,2$, la contrainte de positivité de la demande adressée à chaque firme est vérifiée si $\phi_i^{13*}(4)>\frac{\phi_{i-1}^{13*}(4)+\phi_{i+1}^{13*}(4)}{2}-\frac{t}{16\beta}$ $\forall i=1,2,3,4$. Or, $\phi_i^{13*}-(\frac{\phi_{i-1}^{13*}(4)+\phi_{i+1}^{13*}(4)}{2}-\frac{t}{16\beta})=\frac{t}{16\beta}$, $\forall i=1,2,3,4$. Cette contrainte est donc satisfaite pour tout $t>0$. La condition de viabilité de notre cadre de référence étant $t>\bar{t}(4)>0$, nous avons bien des demandes positives après la fusion.

Positivité profits

Etudions le signe des profits d'équilibre. Pour des valeurs positives de t, le profit de la fusion n'est positif que si $t>t_{13}^{13}(4)$ avec $t^c(4)=\frac{2\sqrt{2}\sqrt{p\left(1+p\eta^2\right)}\left(2+3p\eta^2\right)\beta}{1+p\eta^2}$. Or, $t_{13}^{13}(4)>\bar{t}(4)$. Donc, la fusion de deux firmes consécutives ne peut être profitable que si $t>t_{13}^{13}(4)>\bar{t}(4)$. De plus, pour $t>t_{13}^{13}(4)$, le profit des *outsiders* est positif car $\frac{\partial\Pi_i^{13*}(4)}{\partial t}>0$ pour $t>0$ et que $\Pi_i^{13*}(4)=\frac{3}{32}p^2\eta^2>0$ pour $t=t_{13}^{13}(4)$.

Fusion consécutive vs fusion non consécutive

Pour $t > t_{13}^{13}(4)$, la fonction $D(4)$ est définie par :

$$D(4) = \frac{p^2\beta^2\left(2+3p\eta^2\right)}{\left(t^2+8p^2\eta^2\beta^2\right)^2 t^2} \tag{92}$$
$$\times\Big((5p\eta^2+2)t^4+(32p^2\beta^2\eta^2(5p\eta^2+3))t^2+256p^4\beta^4\eta^4(3p\eta^2+2)\Big).$$

$D(4) > 0$ pour tout $t > t_{13}^{13}(4)$. De plus, pour $\bar{t}(4) < t < t_{13}^{13}(4)$, $\Pi_{12}^{12*}(4)$ et $\Pi_{13}^{13*}(4) < 0$. Nous pouvons en déduire que le gain de fusion de deux firmes consécutives est supérieur au gain de fusion de deux firmes non consécutives.

3. Industrie composée de cinq firmes :

3.1. Fusion d'une paire de firmes consécutives

Positivité des demandes

Nous vérifions à présent les contraintes de positivité des demandes. Pour $i = 1,2$, la contrainte de positivité de la demande adressée à la firme 1 et 2 est vérifiée si $\phi_i^{12*}(5) > \frac{\phi_{i-1}^{12*}+\phi_{i+1}^{12*}}{2} - \frac{t}{25\beta}$ $\forall i = 1,2$. Or, cette contrainte est satisfaite si $t > \frac{5}{2}\sqrt{5p(1+p\eta^2)}\beta$. Concernant les demande des firmes 3, 4 et 5 (*outsiders*), elle sont positives si $\phi_i^{12*}(5) > \frac{\phi_{i-1}^{12*}+\phi_{i+1}^{12*}}{2} - \frac{t}{25\beta}$ pour $i = 3,4,5$. Néanmoins, ces demandes sont positives si $t > 0$. Par conséquent, toutes les firmes ont une demande positive si $t > \frac{5}{2}\sqrt{5p(1+p\eta^2)}\beta$. Or, $\bar{t}(5) > \frac{5}{2}\sqrt{5p(1+p\eta^2)}\beta$. La condition de viabilité de notre cadre de référence étant $t > \bar{t}(5)$, nous avons bien des demandes positives après la fusion.

Positivité des profits

Nous déterminons le signe de ces profits pour la valeur de t qui correspond à la borne inférieure de notre intervalle d'analyse. Nous dérivons ensuite les profits d'équilibre en fonction de t pour étudier leur sens de variation. Nous obtenons alors les résultats suivants :

Si $t = \bar{t}(5)$ alors $\forall p, \forall\beta, \forall\eta$ et pour $i = 3,5$:

$$\Pi_{12}^{12*}(5)\Big|_{\blacklozenge, t=\bar{t}(5)} = \frac{\left(10+13p\eta^2\right)\left(4p\eta^2+5\right)^2\left(1+p\eta^2\right)^2 p}{\left(59p^2\eta^4+110p\eta^2+50\right)^2} > 0,$$

$$\Pi_{i}^{12*}(5)\Big|_{\blacklozenge, t=\bar{t}(5)} = \frac{\left(41p^2\eta^4+95p\eta^2+50\right)\left(1079p^3\eta^6+3225p^2\eta^4+3150p\eta^2+1000\right)p}{200\left(59p^2\eta^4+110p\eta^2+50\right)^2} > 0, \quad (93)$$

$$\Pi_{4}^{12*}(5)\Big|_{\blacklozenge, t=\bar{t}(5)} = -\frac{\left(11p\eta^2+10\right)\left(571p^3\eta^6+1670p^2\eta^4+1600p\eta^2+500\right)\eta^2 p^2}{50\left(59p^2\eta^4+110p\eta^2+50\right)^2} < 0.$$

De plus, Π_{12}^{12*}, Π_{i}^{12*} et Π_{4}^{12*}, $\forall i=3,5$, sont continus en t et pour $t>\bar{t}(5)$, $\forall p, \forall\beta, \forall\eta$:

$$\frac{\partial \Pi_{12}^{12*}(5)}{\partial t} = \frac{2tp^2\beta^2\left(5+7p\eta^2\right)\left((30+34p\eta^2)t^2+25p^2\beta^2\eta^2(5+3p\eta^2)\right)}{\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^3} > 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_{i}^{12*}(5)}{\partial t} = \frac{5tp^2\beta^2\left(5+7p\eta^2\right)\left(4(1+2p\eta^2)t^2-5p^2\beta^2\eta^2(5+p\eta^2)\right)}{\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^3} > 0 \ \forall i=3,5, \quad (94)$$

$$\frac{\partial \Pi_{4}^{12*}(5)}{\partial t} = \frac{4tp^2\beta^2\left(5+7p\eta^2\right)\left(2(5+8p\eta^2)t^2-25p^2\beta^2\eta^2(5+6p\eta^2)\right)}{\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^3} > 0.$$

$\frac{\partial \Pi_{i}^{12*}(5)}{\partial t}$ admet une racine positive qui est $t_1 = \frac{\sqrt{5(1+2p\eta^2)(5+p\eta^2)}\,p\beta\eta}{2(1+2p\eta^2)}$. Or, $\frac{\partial \Pi_{i}^{12*}(5)}{\partial t} > 0$ si $t>t_1$. Or, $t_1 < \bar{t}(5)$. Donc $\frac{\partial \Pi_{i}^{12*}(5)}{\partial t} > 0$ pour $t > \bar{t}(5)$.

$\frac{\partial \Pi_{4}^{12*}(5)}{\partial t}$ admet une racine positive qui est $t_2 = \frac{5\sqrt{2(5+8p\eta^2)(5+6p\eta^2)}\,p\beta\eta}{2(5+8p\eta^2)}$. Or, $\frac{\partial \Pi_{3}^{12*}(5)}{\partial t} > 0$ si $t>t_2$. Or, $t_2 < \bar{t}(5)$. Donc $\frac{\partial \Pi_{4}^{12*}(5)}{\partial t} > 0$ pour $t > \bar{t}(5)$.

$\Pi_{4}^{12*}(5)$ admet une seule racine réelle en t pour $t > \bar{t}(5)$. Il s'agit de :

$$t_4^{12}(5) = \frac{5\sqrt{2}\beta\sqrt{10+13p\eta^2}\sqrt{p(43p^2\eta^4+65p\eta^2+25+\sqrt{Z})}}{2(10+13p\eta^2)}, \quad (95)$$

avec $Z = 1862p^4\eta^8+5600p^3\eta^6+6375p^2\eta^4+3250p\eta^2+625$.

Si la fusion se produit, la firme 4 sort du marché si $t < t_4^{12}(5)$.

Gain de fusion

La fonction $GF(5)$ est définie en deux parties :

Si $t > t_4^{12}(5)$ (firme 4 en place) :

$$GF(5) = \frac{4p^2\eta^2t^6+125p^2\beta^2(5+2p\eta^2-3p^2\eta^4)t^4}{25\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^2 t^2} \quad (96)$$

$$+\frac{625p^4\beta^4\eta^2(75+140p\eta^2+66p^2\eta^4)t^2}{25\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^2t^2}$$

$$+\frac{390625p^6\beta^6\eta^4(1+p\eta^2)^2}{25\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^2t^2}.$$

Pour $t > t_4^{12}(5)$, le polynôme en t de degré 6 au numérateur de $GF(5)$ n'a pas de racine réelle. En calculant la valeur de $GF(5)$ pour $t = p = \beta = \eta = 1$, nous obtenons $GF(5) = \frac{193181}{2025} > 0$. Ainsi, puisque $GF(5)$ est une fonction continue en t, nous en déduisons que $GF(5) > 0$, $\forall p, \forall \beta, \forall \eta$ et $t > t_4^{12}(5)$. Pour $t < t_4^{12}(5)$, la firme 4 est exclue et le gain de fusion ne peut être que positif pusique un concurrent est éliminé.

Gains *outsiders* proches

La fonction $GO^p(5)$ est définie en deux parties :

Si $t > t_4^{12}(5)$ (firme 4 en place) :

$$GO^p(5) = \frac{64p^2\eta^2t^6 + 200p^2\beta^2(25+15p\eta^2-12p^2\eta^4)t^4}{200\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^2t^2} \tag{97}$$

$$+\frac{625p^4\beta^4\eta^2(375+670p\eta^2+283p^2\eta^4)t^2}{200\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^2t^2}$$

$$+\frac{1562500p^6\beta^6\eta^4(1+p\eta^2)^2}{200\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^2t^2}.$$

Pour $t > t_4^{12}(5)$, le polynôme en t de degré 6 au numérateur de $GO^p(5)$ n'a pas de racine réelle. En calculant la valeur de $GO^p(5)$ pour des valeurs quelconques de paramètres, ici pour $t = p = \beta = \eta = 1$, nous obtenons $GO^p(5) = \frac{32804}{675} > 0$. Ainsi, puisque $GO^p(5)$ est une fonction continue en t, nous en déduisons que $GO^p(5) > 0$, $\forall p, \forall \beta, \forall \eta$ et $t > t_4^{12}(5)$. Pour $t < t_4^{12}(5)$, la firme 4 est exclue et le gain de l'*outsider* proche ne peut être que positif puisque un concurrent est éliminé.

Gains des *outsiders* lointains

La fonction $GO^l(5)$ est définie en deux parties :

Si $\bar{t}(5) < t < t_4^{12}(5)$ (firme 4 exclue) :

$$GO^l(5) = -\Pi_4^*(5) < 0. \tag{98}$$

Si $t > t_4^{12}(5)$ (firme 4 en place) :

$$GO^l(5) = \frac{p^2\eta^2\left(4t^2 - 125p\beta^2(1+p\eta^2)\right)}{50\left(2t^2 + 25p^2\eta^2\beta^2\right)^2 t^2} \tag{99}$$
$$\times\left(4t^4 - 50p\beta^2(10+11p\eta^2)t^2 - 3125p^3\beta^4\eta^2(1+p\eta^2)\right).$$

Pour $\bar{t}(5) < t < t_4^{12}(5)$, $GO^l(5)$ est trivialement négatif.

Pour $t > t_4^{12}(5)$, $GO^l(5)$ n'a qu'une racine réelle. Il s'agit de :

$$t_3 = \frac{5}{2}\sqrt{11p^2\eta^2 + 10p + p\sqrt{141p^2\eta^4 + 240p\eta^2 + 100}}\,\beta. \tag{100}$$

Or, $GO^l(5)$ est continue en t et $\frac{\partial GO^l(5)}{\partial t} > 0$ pour $t = t_3$. Ainsi, $GO^l(5) \geq 0$ pour $t \geq t_3 > t_4^{12}(5)$ et $GO^l(5) < 0$ pour $\bar{t}(5) < t < t_3$.

Hold-up des *outsiders* proches

La fonction $HP^p(5)$ est définie en deux parties :

Si $t > t_4^{12}(5)$ (firme 4 en place)

$$HP^p(5) = \frac{-48p^2\eta^2t^4 - 100p^2\beta^2(25+20p\eta^2 - 9p^2\eta^4)t^2}{200\left(2t^2 + 25p^2\eta^2\beta^2\right)^2} \tag{101}$$
$$-\frac{625p^4\beta^4\eta^2(75+110p\eta^2+19p^2\eta^4)}{200\left(2t^2 + 25p^2\eta^2\beta^2\right)^2}.$$

Pour $t > t_4^{12}(5)$, $HP^p(5)$ n'a pas racine réelle. Par exemple, $HP^p(5) = \frac{-25p^2\beta^2}{8t^2}$ pour $\eta = 0$. Ainsi, $HP^p(5) < 0$ pour $t > t_4^{12}(5)$. Le fait que la firme 4 soit exclue pour $t < t_4^{12}(5)$ profite plus aux *outsiders* proches qu'aux firmes de la fusion puisque cela permet à ces derniers de protéger l'ensemble du marché compris entre leurs deux localisations. Ainsi, la fonction $HP^p(5)$ est nécessairement négative pour $t < t_4^{12}(5)$.

Hold-up des *outsiders* lointains

La fonction $HP^l(5)$ est définie en trois parties :

Si $\bar{t}(5) < t < t_4^{12}(5)$ (firme 4 exclue) :

$$HP^j(5) = GF(5) + \Pi_4^*(5) > 0. \qquad (102)$$

Si $t_4^{12}(5) < t < t_3$, $GO^l(5) < 0$ et comme $GF(5) > 0$, alors $HP^j(5) > 0$.

Si $t > t_3$:

$$HP^j(5) = \frac{-12p^2\eta^2 t^4 - 125p^2\beta^2(110p\eta^2 + 93p^2\eta^4 - 25)t^2}{50\left(2t^2 + 25p^2\eta^2\beta^2\right)^2} \qquad (103)$$

$$-\frac{625p^4\beta^4\eta^2(25 + 50p\eta + 24p\eta^2)}{50\left(2t^2 + 25p^2\eta^2\beta^2\right)^2}.$$

$HP^j(5)$ possède une seule racine en t pour $t > t_3$. Il s'agit de :

$$t_4 = \frac{5\sqrt{6}\beta\sqrt{25 + 110\,p\eta^2 + 93p^2\eta^4 + \sqrt{Y}}}{12\eta}, \qquad (104)$$

avec $Y = 625 + 5500p\eta^2 + 15550p^2\eta^4 + 18060p^3\eta^6 + 7497p^4\eta^8$.

Or, $HP^j(5)$ est continue en t et pour $t = t_4$, $\frac{\partial HP^j(5)}{\partial t} < 0$. Ainsi, $HP^j(5) \geq 0$ pour $t \leq t_4$ et $HP^j(5) < 0$ pour $t > t_4$.

3.2. Fusion d'une paire de firmes non consécutives

Positivité des demandes

Pour $i = 1,2$, la contrainte de positivité de la demande adressée à chaque firme est vérifiée si $\phi_i^{13*}(5) > \frac{\phi_{i-1}^{13*} + \phi_{i+1}^{13*}}{2} - \frac{t}{25\beta}$ $\forall i = 1,2,3,4$. Or, $\phi_i^{13*}(5) - (\frac{\phi_{i-1}^{13*} + \phi_{i+1}^{13*}}{2} - \frac{t}{25\beta}) = \frac{t}{25\beta}$, $\forall i = 1,2,3,4,5$. Cette contrainte est donc satisfaite pour tout $t > 0$. La condition de viabilité de notre cadre de référence étant $t > \bar{t}(5) > 0$, nous avons bien des demandes positives après la fusion.

Positivité des profits

$\frac{\partial \Pi_{13}^{13*}(5)}{\partial t} = 2\mathrm{p}^2\beta^2\left(5 + 7p\eta^2\right)^2 \frac{}{t^3 > 0\,pour}$ t>0. $\Pi_{13}^{13*}(5)$ ne s'annule pour des valeurs positives de t que si $t = t_5 = \frac{\sqrt{10}\sqrt{p\left(1+p\eta^2\right)}\left(5+7p\eta^2\right)\beta}{2(1+p\eta^2)}$. Or, $t_5 > \bar{t}(5)$. Ainsi, nous en déduisons que $\Pi_{13}^{13*}(5) < 0$ pour $t < t_5$ et $\Pi_{13}^{13*}(5) \geq 0$ pour $t \geq t_5$. La fusion ne peut donc avoir lieu que si $t \geq t_5$.

$\frac{\partial \Pi_i^{13*}(5)}{\partial t} = \frac{p^2\beta^2\left(5+7p\eta^2\right)^2}{t^3} > 0$ pour $t > 0$, $\forall i = 2,4,5$. $\Pi_{13}^{13*}(5)$ ne s'annule pour des valeurs positives de t que si $t = t_6 = \frac{5\sqrt{\left(13p\eta^2+10\right)p\left(5+7p\eta^2\right)}\beta}{13p\eta^2+10}$. Ainsi, nous en déduisons que $\Pi_i^{13*}(5) \geq 0$ pour $t \geq t_6$

$\forall i = 2,4,5$. Mais comme $t_6 < t_5$, les *outsiders* ont toujours un profit positif lorsque la fusion peut éventuellement se produire, c'est à dire pour $t \geq t_5$.

Fusion consécutive vs fusion non consécutive

Pour $t \geq t_4^{12}(5)$, la fonction $D(5)$ est définie par :

$$D(5) = \frac{p^2\beta^2\left(5+7p\eta^2\right)}{t^2\left(2t^2+25p^2\eta^2\beta^2\right)^2} \tag{105}$$

$$\times\Big((5+11p\eta^2)t^4 + 25p^2\eta^2\beta^2(15+23p\beta^2\eta^2)t^2 + 625p^4\beta^4\eta^4(5+7p\eta^2)\Big).$$

$\Pi_{13}^{13*}(5) > 0$ pour tout $t > t_5$. Or, $t_5 > t_4^{12}(5)$ et $D(5)$ est définie pour $t > t_4^{12}(5)$ avec $\Pi_{12}^{12*}(5) > 0$ pour $t > t_4^{12}(5)$. Puisque $D(5) > 0$, nous pouvons en déduire que le gain de fusion de deux firmes consécutives est supérieur au gain de fusion de deux firmes non consécutives pour $t > t_4^{12}(5)$. Pour $\bar{t}(5) < t_4^{12}(5)$, nous savons que $\Pi_{13}^{13*}(5) < 0$ et $\Pi_{12}^{12*}(5) > 0$. Ainsi, la fusion consécutive domine la non consécutive sur cet intervalle.

4. Industrie composée de n firmes :

Positivité des demandes

Nous vérifions à présent les contraintes de positivité des demandes. Pour $i = 1,2$, la contrainte de positivité de la demande adressée à la firme 1 et 2 est vérifiée si $\phi_i^{12*}(n) > \frac{\phi_{i-1}^{12*}+\phi_{i+1}^{12*}}{2} - \frac{t}{n^2\beta}$ $\forall i = 1,2$. Or, cette contrainte est satisfaite si $t > \frac{n}{2}\sqrt{np(1+p\eta^2)}\beta$. Concernant les demande des firmes *outsiders*, elle sont positives si $\phi_i^{12*}(n) > \frac{\phi_{i-1}^{12*}+\phi_{i+1}^{12*}}{2} - \frac{t}{n^2\beta}$ pour $i = 3,...,n$. Néanmoins, ces demandes sont positives si $t > 0$. Par conséquent, toutes les firmes ont une demande positive si $t > \frac{n}{2}\sqrt{np(1+p\eta^2)}\beta$. Or, $\bar{t}(5) > \frac{n}{2}\sqrt{np(1+p\eta^2)}\beta$. La condition de viabilité de notre cadre de référence étant $t > \bar{t}(5)$, nous avons bien des demandes positives après la fusion.

Statique comparative

L'analyse de statique comparative des variables stratégiques des firmes après la fusion en fonction de n, t, p, β et η est résumée dans le tableau ci-dessous avec $n > 4$, $i = 1,2$, $j = 3,n$, $z = 4,...,n-1$ et $t > t_j^{12}(n)$.

	$d\phi_i^{12*}(n)$	$d\phi_j^{12*}(n)$	$d\phi_z^{12*}(n)$	$d\theta_i^{12*}(n)$	$d\theta_j^{12*}(n)$	$d\theta_z^{12*}(n)$
dn	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
dt	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	0
dp	$+$	$+$	$+$	$-$ pour $t < r_1(n)$	$+$	$+$
				$+$ pour $t > r_1(n)$		
$d\beta$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	0
$d\eta$	$+$	$+$	$+$	$+$ si $p\eta^2 < s$	$+$	$+$
				$-$ pour $t < r_2(n)$ et $p\eta^2 > s$		
				$+$ pour $t > r_2(n)$ et $p\eta^2 > s$		

Tableau 2 : statique comparative pour une fusion de deux firmes consécutives dans une industrie de n firmes

avec $r_1(n) = \frac{n\beta\sqrt{2p((2+3p\eta^2)n + 2p\eta^2 + \sqrt{(9p^2\eta^4 + 12p\eta^2 + 4)n^2 + (20p^2\eta^4 + 8p\eta^2)n + 4p^2\eta^4})}}{4}$,

$r_2(n) = \frac{n\beta\sqrt{2p((1+3p\eta^2)n + 2p\eta^2 + \sqrt{(9p^2\eta^4 + 6p\eta^2 + 1)n^2 + (20p^2\eta^4 - 4p\eta^2)n + 4p^2\eta^4})}}{4}$

et $s(n)$ la racine réelle positive du polynôme en x suivant : $(4n^3 + 6n^2 - 8n + 1)x^4 + (8n^3 + 14n^2 - 8n - 1)x^3 + (10n^2)x^2 + (2n^2 - 8n^3)x - 4n^3$.

Positivité des profits

Nous déterminons le signe de ces profits pour la valeur de t qui correspond à la borne inférieure de notre intervalle d'analyse. Nous dérivons ensuite les profits d'équilibre en fonction de t pour étudier leur sens de variation. Nous obtenons alors les résultats suivants :

Si $t = \bar{t}(n)$ alors $\forall p, \forall \beta, \forall \eta, \forall n \geq 2$ et pour $i = 3, n$ et $j = 4, \ldots, n-1$:

$$\Pi_{12}^{12*}(n)\Big|_{\blacklozenge, t=\bar{t}(n)} = \frac{p(1+p\eta^2)^2(3p\eta^2 + 2p\eta^2 n + 2n)(n - p\eta^2 + p\eta^2 n)^2}{(2n^2 + 4n^2 p\eta^2 + 2n^2 p^2\eta^4 + 2p\eta^2 n + 2np^2\eta^4 - p^2\eta^4)^2} > 0,$$

$$\Pi_i^{12*}(n)\Big|_{\blacklozenge, t=\bar{t}(n)} = \frac{p\left(2(1 + p\eta^2(2+p\eta^2))n^2 - p\eta^2(1+p\eta^2)n - 4p^2\eta^4\right)}{8n^2\left(2(p^2\eta^4 + 2p\eta^2 + 1)n^2 + 2(p^2\eta^4 + p\eta^2)n - p^2\eta^4\right)^2} \times [A] > 0, \tag{106}$$

$$\Pi_j^{12*}(n)\Big|_{\blacklozenge, t=\bar{t}(n)} = -\frac{p^2\eta^2\left(2(1+p\eta^2)n + p\eta^2\right)}{2n^2\left((2 + 4p\eta^2 + 2p^2\eta^4)n^2 + (2p^2\eta^4 + 2p\eta^2)n - p^2\eta^4\right)^2} \times [B] < 0,$$

avec

$$A = 8\left(p^3\eta^6 + 3p^2\eta^4 + 3p\eta^2 + 1\right)n^3 + 6\left(p^3\eta^6 + 2p^2\eta^4 + p\eta^2\right)n^2$$
$$-15\left(p^3\eta^6 + p^2\eta^4\right)n + 4p^3\eta^6 \text{ et}$$
$$B = 4\left(\eta^6 p^3 + 3p\eta^2 + 3p^2\eta^4 + 1\right)n^3 + 4\left(p\eta^2 + \eta^6 p^3 + 2p^2\eta^4\right)n^2$$
$$-6\left(\eta^6 p^3 + p^2\eta^4\right)n + \eta^6 p^3.$$

De plus, $\Pi_{12}^{12*}(n)$, $\Pi_i^{12*}(n)$ et $\Pi_j^{12*}(n)$, $\forall i = 3, n$ et $j = 4, \ldots, n-1$, sont continus en t et pour $t > \bar{t}(n)$, $\forall p, \forall \beta, \forall \eta, \forall n \geq 2$:

$$\frac{\partial \Pi_{12}^{12*}(5)}{\partial t} = \frac{2p^2 t\beta^2\left(n(1+p\eta^2) + 2p\eta^2\right)}{\left(2t^2 + n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^3}$$
$$\times\left[\left((6+6p\eta^2)n + 4p\eta^2\right)t^2 + n^3\beta^2p^2\eta^2(1+p\eta^2) - 2n^2p^3\beta^2\eta^4\right] > 0, \tag{107}$$
$$\frac{\partial \Pi_i^{12*}(5)}{\partial t} = \frac{p^2 t\beta^2\left(n(1+p\eta^2) + 2p\eta^2\right)}{\left(2t^2 + n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^3}$$
$$\times\left[\left((4+4p\eta^2)n + 20p\eta^2\right)t^2 - n^3\beta^2p^2\eta^2(1+p\eta^2) + 4n^2p^3\beta^2\eta^4\right] > 0 \ \forall i = 3, n,$$
$$\frac{\partial \Pi_j^{12*}(5)}{\partial t} = \frac{4tp^2\beta^2\left(n(1+p\eta^2) + 2p\eta^2\right)}{\left(2t^2 + n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^3}$$
$$\times\left[\left((2+2p\eta^2)n + 6p\eta^2\right)t^2 - n^3\beta^2p^2\eta^2(1+p\eta^2) - n^2p^3\beta^2\eta^4\right] > 0.$$

$\frac{\partial \Pi_{12}^{12*}(n)}{\partial t}$ n'admet pas de racine réelle pour $n \geq 2$.

$\frac{\partial \Pi_i^{12*}(n)}{\partial t}$ admet une racine positive qui est $t_7 = \frac{\sqrt{\left(p\eta^2 n + 5p\eta^2 + n\right)\left(p\eta^2 n - 4p\eta^2 + n\right)}\,\eta\beta pn}{2(p\eta^2 n + 5p\eta^2 + n)}$. Or, $\frac{\partial \Pi_i^{12*}(n)}{\partial t} > 0$ si $t > t_7$. Or, $t_7 < \bar{t}(n)$. Donc $\frac{\partial \Pi_i^{12*}(n)}{\partial t} > 0$ pour $t > \bar{t}(n)$.

$\frac{\partial \Pi_j^{12*}(n)}{\partial t}$ admet une racine positive qui est $t_8 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\left(p\eta^2 n + 3p\eta^2 + n\right)\left(p\eta^2 n + p\eta^2 + n\right)}\,\eta\beta np}{2(p\eta^2 n + 3p\eta^2 + n)}$. Or, $\frac{\partial \Pi_j^{12*}(n)}{\partial t} > 0$ si $t > t_8$. Or, $t_8 < \bar{t}(n)$. Donc $\frac{\partial \Pi_j^{12*}(n)}{\partial t} > 0$ pour $t > \bar{t}(n)$. $\Pi_j^{12*}(n)$ admet une seule racine réelle positive en t pour $t > \bar{t}(n)$. Il s'agit de :

$$t_j^{12}(n) = \frac{n\beta\sqrt{2\left(3p\eta^2 + 2n(1+p\eta^2)\right)p}}{2(3p\eta^2 + 2n(1+p\eta^2))}$$
$$\times\sqrt{\left(p^2\eta^4 + 2p\eta^2 + 1\right)n^2 + 3\left(p^2\eta^4 + p\eta^2\right)n + 3p^2\eta^4 + \sqrt{C}}, \tag{108}$$

avec

$$C = \left(p^4\eta^8 + 4p^3\eta^6 + 6p^2\eta^4 + 4p\eta^2 + 1\right)n^4 + 6\left(p^4\eta^8 + 3p^3\eta^6 + 3p^2\eta^4 + p\eta^2\right)n^3$$
$$+15\left(p^4\eta^8 + 2p^3\eta^6 + p^2\eta^4\right)n^2 + 20\left(p^4\eta^8 + p^3\eta^6\right)n + 12p^4\eta^8.$$

Si la fusion se produit, au moins une firme *outsider* lointain doit sortir du marché si $t < t_j^{12}(n)$ puisque $\Pi_j^{12*}(n) < 0$ pour $t < t_j^{12}(n)$. Ceci ne peut qu'augmenter le profit des autres firmes par réduction de la concurrence.

Gain de fusion

La fonction $GF(n)$ est définie en deux parties :

Si $t > t_j^{12}(n)$:

$$GF(n) = \frac{4p^2\eta^2t^6 + p\beta^2\eta^2\left((1+p\eta^2)^2 pn^2 - 8\left(1+p\eta^2\right)p^2n^3\right)t^4}{n^2\left(2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2t^2} \tag{109}$$

$$+\frac{\beta^4(3\left(1+p\eta^2\right)^2p^4\eta^2n^6 - 2\left(1+p\eta^2\right)p^5\eta^4n^5 + p^6\eta^6n^4)t^2}{n^2\left(2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2t^2}$$

$$+\frac{\left(1+p\eta^2\right)^2p^6\beta^6\eta^4n^8}{n^2\left(2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2t^2}.$$

Pour $t > t_j^{12}(n)$, le polynôme en t de degré 6 au numérateur de $GF(n)$ n'a pas de racine réelle. En calculant la valeur de $GF(n)$ pour $t = p = \beta = \eta = n = 1$, nous obtenons $GF(n) = \frac{102908501}{260100} > 0$. Ainsi, puisque $GF(n)$ est une fonction continue en t, nous en déduisons que $GF(n) > 0$, $\forall p, \forall\beta, \forall\eta, \forall\eta$ et $t > t_j^{12}(n)$. Pour $t < t_j^{12}(n)$, la configuration est la même avec exclusion d'au moins une firme *outsider lointain*. Le gain de fusion ne peut donc être que positif puisque un concurrent est éliminé.

Gains *outsiders* proches

La fonction $GO^p(n)$ est définie en deux parties :

Si $t > t_j^{12}(n)$:

$$GO^p(n) = \frac{64p^2\eta^2t^6 + 8\beta^2(\left(1+p\eta^2\right)^2p^2n^4 - 7p^4\eta^4n^3 - 2p^4\eta^4n^2 - 7p^3n)t^4}{8n^2\left(2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2t^2} \tag{110}$$

$$+\frac{\beta^4(15\left(1+p\eta^2\right)^2p^4\eta^2n^6 - 16\left(1+p\eta^2\right)p^5\eta^4n^5 - 12p^6\eta^6n^4)t^2}{8n^2\left(2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2t^2}$$

$$+\frac{4\left(1+p\eta^2\right)^2p^6\eta^4\beta^6n^8}{8n^2\left(2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2t^2}.$$

Pour $t > t_j^{12}(n)$, le polynôme en t de degré 6 au numérateur de $GO^p(n)$ n'a pas de racine réelle. En calculant la valeur de $GO^p(n)$ pour des valeurs quelconques de paramètres, ici pour $t = p = \beta = \eta = 1$ et $n = 10$, nous obtenons $GO^p(n) = \frac{2876539}{14450} > 0$. Ainsi, puisque $GO^p(n)$ est une fonction continue en t, nous en déduisons que $GO^p(n) > 0$, $\forall p, \forall \beta, \forall \eta, \forall n$ et $t > t_j^{12}(n)$. Pour $t < t_j^{12}(n)$, la configuration est la même avec exclusion d'au moins une firme *outsider* lointain. Le gain d'un *outsider* proche ne peut donc être que positif puisque un concurrent est éliminé.

Gains *outsiders* lointains

La fonction $GO^l(n)$ est définie en deux parties.

Si $t > t_j^{12}(n)$:

$$GO^l(5) = \frac{p^2\eta^2\left(4t^2 - n^3 p\beta^2(1+p\eta^2)\right)}{2n^2\left(2t^2 + n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2 t^2} \tag{111}$$

$$\times\left(4t^4 - 2n^2p\beta^2\left(2n + (2n+1)p\eta^2\right)t^2 - n^5p^3\beta^4\eta^2(1+p\eta^2)\right)$$

Pour $t > t_j^{12}(n)$, $GO^l(n)$ n'a qu'une racine réelle. Il s'agit de :

$$t_9 = \frac{n}{2}\sqrt{(2n+1)p^2\eta^2 + 2np + p\sqrt{4\left(1+p\eta^2\right)^2 n^2 + 8\left(p^2\eta^4 + p\eta^2\right)n + p^2\eta^4}}\,\beta. \tag{112}$$

Or, $GO^l(n)$ est continue en t et $\frac{\partial GO^l(n)}{\partial t} > 0$ pour $t = t_9$. Ainsi, $GO^l(n) \geq 0$ pour $t \geq t_9 > t_j^{12}(n)$. Pour $\bar{t}(n) < t < t_9$, le gain de l'*outsider* devient négatif. Plus particulièrement, pour $t < t_j^{12}(n) < t_9$, une firme au moins sort du marché. Cette firme ou ces firmes perdent donc la totalité de leur profit initial.

Hold-up des *outsiders* proches

La fonction $HP^p(n)$ est définie en deux parties :

Si $t > t_j^{12}(n)$:

$$HP^p(n) = \frac{-48p^2\eta^2t^4 - 4p^2\beta^2(\left(1+p\eta^2\right)^2n^4 - 6p\eta^2\left(1+p\eta^2\right)n^3 - 4p^2\eta^4n^2)t^2}{8n^2\left(2t^2 + n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2}$$

$$-\frac{3\beta^4p^4\eta^2\left(1+p\eta^2\right)^2n^6-8p^5\beta^4\eta^4\left(1+p\eta^2\right)n^5-16p^6\eta^6\beta^4n^4}{8n^2\left(2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2}. \tag{113}$$

Pour $t > t_j^{12}(n)$, $HP^p(n)$ n'a pas racine réelle. Par exemple, $HP^p(n) = \frac{-n^2p^2\beta^2}{8t^2}$ pour $\eta = 0$. Ainsi, $HP^p(n) < 0$ pour $t > t_j^{12}(n)$. Le fait qu'au moins un *outsider* lointain soit exclu pour $t < t_j^{12}(n)$ profite plus aux *outsiders* proches qu'aux firmes de la fusion puisque la ou les firmes qui sont exclues se situent du côté du marché opposé à la fusion. Ainsi, la fonction $HP^p(n)$ est nécessairement négative pour $t < t_j^{12}(n)$.

Hold-up des *outsiders* lointains

La fonction $HP^l(n)$ est définie en deux parties :

Si $\bar{t}(n) < t < t_j^{12}(n)$, au moins un outsider lointain est exclu du marché. Les firmes ne voulant pas être exclue du marché, cela suffit à empêcher tout mécanisme de blocage de la fusion.

Si $t > t_j^{12}(n)$:

$$HP^l(n) = \frac{-12p^2\eta^2t^4 + p^2\beta^2(\left(1+p\eta^2\right)^2n^4 + 12p\eta^2\left(1+p\eta^2\right)n^3 + 8p^2\eta^4n^2)t^2}{2n^2\left(2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2}$$

$$-\frac{\beta^4p^4\eta^2\left(1+p\eta^2\right)^2n^6 - p^6\beta^4\eta^6n^4}{2n^2\left(2t^2+n^2p^2\beta^2\eta^2\right)^2}. \tag{114}$$

Pour $\bar{t}(n) < t < t_9$, $GO^l(n) < 0$ et comme $GF(n) > 0$, $HP^l(n) < 0$.

Pour $t > t_9$, $HP^l(n)$ n'a qu'une racine réelle. Il s'agit de :

$$t_{10} = \frac{\sqrt{6}\sqrt{\left(1+p\eta^2\right)^2n^2 + 12\left(p^2\eta^4+p\eta^2\right)n + 8p^2\eta^4 + \sqrt{D}}\,n\beta}{12\eta}, \tag{115}$$

$$\text{avec } D = \left(p^4\eta^8 + 4p^3\eta^6 + 6p^2\eta^4 + 4p\eta^2 + 1\right)n^4 + 24\left(p^4\eta^8 + 3p^3\eta^6 + 3p^2\eta^4 + p\eta^2\right)n^3$$
$$+112\left(p^4\eta^8 + 2p^3\eta^6 + p^2\eta^4\right)n^2 + 192\left(p^4\eta^8 + p^3\eta^6\right)n + 112p^4\eta^8.$$

Or, $HP^l(n)$ est continue en t et pour $t = t_{10}$, $\frac{\partial HP^l(n)}{\partial t} < 0$. Ainsi, $HP^l(n) \geq 0$ pour $t \leq t_{10}$ et $HP^l(n) < 0$ pour $t > t_{10}$.

Analyse du bien-être

$$F_F = (\frac{1}{n} + 2(\hat{x} - \frac{1}{n}))\phi_i^{12*}(n) + (\frac{n-3}{n} + 2(\frac{2}{n} - \hat{x}))\phi_j^{12*}(n) \tag{116}$$

$$= (2\hat{x} - \frac{1}{n})\phi_i^{12*}(n) + (\frac{n+1}{n} - 2\hat{x})\phi_j^{12*}(n)$$

$$= \frac{pt\beta(n + (2+n)p\eta^2)((4n-4)t^2 + n^3 p\beta^2(1+3p\eta^2))}{n\left(2t^2 + n^2 p^2\eta^2\beta^2\right)^2},$$

Analysons la différence de densité de la demande entre avant et après la fusion :

$$D_F - D_{NF} = \frac{p\eta^2\left(4t^2 - p\beta^2 n^3(1+p\eta^2)\right)}{n\left(2t^2 + n^2p^2\eta^2\beta^2\right)} > 0, \forall t > t_j^{12}(n). \tag{117}$$

La différence des coûts de transports supportés par les consommateurs pour une densité unitaire du marché entre avant et après la fusion, c'est à dire $C_F - C_{NF}$ est positive pour nos valeurs de paramètres. En effet, avant que la fusion ne se produise, les coûts de transport sont minimaux puisque le marché est symétrique et que les consommateurs marginaux sont à égales distances entre chacune des localisations des firmes. Après la fusion, les consommateurs marginaux sont situés de la même manière sauf pour ceux qui sont entre la fusion et les firmes *outsiders* proches. Ce déplacement de consommateurs marginaux induit nécessairement des distances supplémentaires à parcourir pour certains consommateurs.
Analysons la différence du profit global de l'industrie entre avant et après la fusion, soit $\Delta\Pi$:

$$\Delta\Pi \tag{118}$$

$$= i = 1n\Pi_i^{12}(n) - i = 1n\Pi_i(n)$$

$$= \frac{16(2n-3)p^2\eta^2t^6 + \left(4\left(3 - 4p\eta^2 - 7p^2\eta^4\right)n^2 + 8\left(9 + 7p\eta^2\right)p\eta^2 n + 48p^2\eta^4\right)n^2p^2\beta^2t^4}{4n^2\left(2t^2 + n^2p^2\eta^2\beta^2\right)^2 t^2}$$

$$+ \frac{(8\left(1+p\eta^2\right)^2 n^3 - \left(9p^2\eta^4 + 14p\eta^2 + 5\right)n^2 - 8p\eta^2\left(1+p\eta^2\right)n - 8p^2\eta^4)n^4p^4\beta^4\eta^2t^2}{4n^2\left(2t^2 + n^2p^2\eta^2\beta^2\right)^2 t^2}$$

$$+ \frac{2n^9p^6\beta^6\eta^4(1+p\eta^2)^2}{4n^2\left(2t^2 + n^2p^2\eta^2\beta^2\right)^2 t^2}.$$

Si $t > t_j^{12}(n)$, $i = 1n\Pi_i^{12}(n) > 0$ et $i = 1n\Pi_i(n) > 0$ car aucune firme ne sort du marché.

$\Delta\Pi$ n'a aucune racine réelle pour nos valeurs de paramètres. Nous obtenons donc le signe de $\Delta\Pi$ en remplaçant les variables par des valeurs quelconques de nos paramètres. Si $n = t = p = \beta = \eta = 1$, $\Delta\Pi = \frac{29}{9} > 0$. La fusion augmente donc le profit global de l'industrie.